D. FLONDOR N. DONCIU

ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

* *

culegere de probleme

Scanned with OKEN Scanner

D. FLONDOR

N. DONCIU

ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

*

culegere de probleme

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1979

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

ENUNȚURI

Partea I 5

Capitolul I. Valori proprii, vectori proprii, direcții proprii ale unei matrici pătrate. Reducerea unei matrici pătrate la forma diagonală și la forma triunghiulară. Aplicațiile diagonalizării. Matrici forma Jordan. Endomorfism nediagonalizabil. Matrici simetrice și hermitiene. Teorema lui Cayley și Hamilton 5

Partea II-a 16

Capitolul II. Calculul funcțiilor primitive. Tabloul primitivelor. Integrarea prin substituții. Integrarea prin părți. Integrarea prin relații de recurență. Integrarea fracțiilor raționale. Integrarea funcțiilor iraționale. Integrarea funcțiilor trigonometrice. Integrarea prin diferite metode 16

Capitolul III. Integrala definită. Integrale generalizate 27

Capitolul IV. Funcții euleriene 40

Capitolul V. Funcții definite printr-o integrală 46

Capitolul VI. Diferite alte integrale 51

Capitolul VII. Aplicațiile integalei definite în geometrie și mecanică. Ariile figurilor plane. Lungimea unui arc de curbă. Volumul unui corp de rotație, Aria unei suprafețe de rotație. Teoremele lui Guldin 54

Capitolul VIII. Serii de funcții de o variabilă reală. Interval de convergență. Derivarea unei serii întregi. Integrarea unei serii întregi. Operații cu seriile. Spațiul vectorial al seriilor întregi. Restul unei serii întregi. Șiruri și serii de funcții reale, convergentă uniformă. Șiruri de funcții. Convergentă simplă. Serii de funcții convergență uniformă 59

Capitolul IX. Integrala curbilinie 68

Capitolul X. Integrala dublă. Formula lui Green-Riemann. Schimbarea de variabile în integrala dublă 74

Capitolul XI. Integrale de suprafață. Integrale de suprafață de prima speță. Integrala de suprafață de speța a doua 82

Capitolul XII. Integrala triplă. Schimbarea de variabile. Coordonate cilindrice. Coordonate sferice 84

Capitolul XIII. Analiză vectorială. Formule integrale. Integrala de suprafață. Flux. Formula generală a transformării integralelor. Formula lui Stokes. Rotorul. Formula lui Gauss-Ostrogradski. Divergență. Gradient-Potențial. Potențial vector 86

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIV. Ecuații diferențiale. Noțiuni generale 93
— Ecuația cu variabile separabile 93
— Curbe condiționate în coordonate polare 94
— Ecuații omogene și reductibile la omogene 95
— Ecuații liniare de ordinul I și ecuații reductibile la liniare . . . 96
— Ecuații diferențiale și forme diferențiale. Factor integrant . . . 98
— Ecuații Lagrange și Clairaut 100
— Traiectorii ortogonale și traiectorii sub unghiul α 100
— Soluții singulare ale ecuațiilor diferențiale de ordinul I 103
— Ecuații diferențiale de ordinul II reductibile la ordinul I 103

Capitolul XV. Ecuații liniare de ordin n 104
— Ecuații omogene 104
— Ecuații neomogene 104
— Ecuația de ordinul II cu coeficienți constanți 105
— Ecuația de ordinul III cu coeficienți constanți 105
— Metoda variației constantelor 108
— Ecuația lui Euler 108
— Ecuații diferențiale cu coeficienți variabili 108
— Aplicația seriilor întregi la ecuații diferențiale 109
— Ecuația liniară de ordinul I 109
— Aplicațiile seriilor la ecuația liniară de ordinul II 110
— Primele noțiuni asupra ecuației lui Bessel 111

Capitolul XVI. Sisteme de ecuații diferențiale 113
— Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți . . 116
— Metoda matriceală 116

Capitolul XVII. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul I liniare 119

SOLUȚII

Capitolul I 123
Capitolul II 156
Capitolul III 199
Capitolul IV 231
Capitolul V 240
Capitolul VI 254
Capitolul VII 267
Capitolul VIII 276
Capitolul IX 296
Capitolul X 308
Capitolul XI 324
Capitolul XII 334
Capitolul XIII 351
Capitolul XIV 363
Capitolul XV 381
Capitolul XVI 399
Capitolul XVII 423

BIBLIOGRAFIE 440

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA ÎNTÎI
ENUNŢURI

CAPITOLUL I

VALORI PROPRII, VECTORI PROPRII, DIRECŢII PROPRII ALE UNEI MATRICE PĂTRATE

REDUCEREA UNEI MATRICI PĂTRATE

Se notează cu E un spaţiu vectorial de dimensiune n pe corpul comutativ K şi prin e endomorfismul identic.

1. VALORI PROPRII, POLINOM CARACTERISTIC

1°. Fie u un endomorfism al unui spaţiu vectorial E, un număr $\lambda \in \mathbf{R}$ se numeşte valoare proprie a lui u dacă există un vector $x \neq 0$ în E astfel încît

$$u(x) = \lambda x\,;\ (AX = \lambda X)\,;$$

sau încă endomorfismul $u - \lambda e$ nu este inversabil, sau matricea $A - \lambda I$ nu este inversabilă. Aşadar valorile proprii ale unui endomorfism u sînt numerele reale $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ corpul de bază) astfel ca endomorfismul $u - \lambda e$ să fie singular. Sub spaţiul propriu asociat este Ker $(u - \lambda e)$. Practic se utilizează reprezentarea într-o bază ; dacă A este matricea lui u, endomorfismul $u - \lambda e$ este singular, dacă determinantul matricei $A - \lambda I$ este nul.

Dezvoltarea acestui determinant ne conduce la polinomul caracteristic aie cărui rădăcini sînt valorile proprii ale endomorfismului.

2°. Valorile proprii ale matricei A aparţinînd mulţimei $M_n(K)$ a matricelor pătrate sînt zerourile polinomului caracteristic $\Delta(\lambda)$, adică

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_2^n \\ \vdots & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația care dă valorile proprii este de gradul n în λ. Termenii în λ^n și λ^{n-1} provin din produsul termenilor în diagonala principală. Termenul independent de λ se obține făcînd $\lambda = 0$ în $\Delta(\lambda)$ deci este egal cu $\det A$. După înmulțire cu $(-1)^n$ ecuația în λ devine

$$1)\ \lambda^n - (a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A = 0.$$

Suma elementelor din diagonala principală a unei matrice se numește urma matricei și se notează cu $\operatorname{tr} A$. Așadar

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \quad + \lambda_n = a_1^1 + a_2^2 + \quad + a_n^n = \operatorname{tr} A$$

Pe de altă parte termenul independent de λ în ecuația (1) este $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ el trebuie să fie egal cu $(-1)^n \det A$, așadar $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det A$.

Suma valorilor proprii a unei matrice pătrate A este $\operatorname{tr} A$ și produsul valorilor proprii este $\det A$. Deci dacă o matrice A nu este o matrice singulară, nici una din valorile proprii nu poate fi zero.

Orice matrice $B = P^{-1}AP$ asemenea cu matricea A admite același polinom caracteristic.

Polinomul caracteristic poate să nu aibă toate rădăcinile sale în corpul $\mathbf{R}$ și adesea sîntem conduși a lua drept corp al scalarilor supracorpul numerelor complexe.

II. FORMULELE DE RECURENȚĂ ALE LUI BÔCHER PENTRU DETERMINAREA ECUAȚIILOR CARACTERISTICE ALE MATRICELOR

Fie A o matrice pătrată de ordinul n, dacă se notează cu $s_1 = \operatorname{tr} A$; $s_2 = \operatorname{tr} A^2 \ldots s_n = \operatorname{tr} A^n$ coeficienții ecuației caracteristice

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

sînt dați de formulele de recurență ale lui Bôcher

$$\alpha_1 = -s_1$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 s_1 + s_2)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 + s_3)$$

. . . . . .

$$\alpha_n = -\frac{1}{n}(\alpha_{n-1} s_1 + \alpha_{n-2} s_2 + \ldots + \alpha_1 s_{n-1} + s_n).$$

III. VECTORII PROPRII, SUBSPAȚII PROPRII

1°. Dacă λ este o valoare proprie a endomorfismului u (al matricei A), mulțimea soluțiilor ecuației $ux = \lambda x$; $(AX = \lambda X)$ este un subspațiu vectorial H_λ al lui E (al lui K^n) numit subspațiu propriu asociat lui λ, elementele nenule ale lui H_λ sînt vectorii proprii asociați lui λ.

Scanned with OKEN Scanner

2°. Dacă valorile proprii ale unui matrice A sînt distincte, vectorii proprii sînt liniar independenți.

3°. Suma $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_k$ a subspațiilor proprii asociate valorilor proprii distincte este directă, prin urmare reuniunea unei baze a lui H_1, a unei baze a lui H_2, a unei baze a lui H_k constituie o bază a lui H.

1. Să se determine polinomul caracteristic al unei matrici triunghiulare.

2. Fie A și B două matrici de același ordin dintre care una este o matrice regulată. Să se arate că AB și BA au același polinom caracteristic.

3. Să se determine ecuațiile caracteristice și valorile proprii ale următoarelor matrici

a) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \frac{k_0+k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k_0+k}{m} \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix}$; f $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}$

4. Să se determine valorile proprii ale matricelor

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & o & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Să se descompună într-un produs de factori polinomul caracteristic al matricei

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix}.$$

Să se deducă valorile proprii ale matricei A și valoarea lui $\det A$.

6. Să se determine polinomul caracteristic al matricei

$$A = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \end{bmatrix} [bb \ldots b]$$

unde matricele linie și coloană sînt de cîte n elemente.

Scanned with OKEN Scanner

7. Să se calculeze valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & \beta \\ -\alpha & \alpha & -\beta \\ \beta & -\beta & 2\alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

8. Se dau numerele reale α, β, γ şi fie $U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{bmatrix}$ matricea asociată endomorfismului u al lui $\mathbf{R}^3$ relativ la baza canonică. Să se calculeze valorile proprii ale lui U.

9. Să se descompună în factori determinantul

$$D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} x, & a_1 & a_2 \ldots, & a_n & 1 \\ a_1 & x \ldots\ldots\ldots & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ a_1 & a_2 & . \; . \; . & a_n & x \end{vmatrix}$$

şi să se calculeze valorile proprii ale matricei

$$M = \begin{bmatrix} 1, & a_1 & a_2 \ldots, & a_n \\ a_1 & 1 & \ldots, & a_n \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & . \; . \; ., & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Se consideră matricea $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$ unde A este o matrice pătrată de ordinul n, 0 matricea nulă de ordinul n şi I matricea unitate de ordinul n. Să se arate că dacă valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, acele ale matricei B sînt $\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}$.

11. Fie A o matrice pătrată de ordinul n, ale cărei elemente aparţin corpului comutativ K, se notează cu P, polinomul caracteristic al matricei A, presupunînd că $P(0)$ este diferit de zero.

Să se arate că matricea A, admite o matrice inversă A^{-1} şi că polinomu caracteristic R al matricei A^{-1} este definit prin

$$R(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Se va putea de exemplu studia determinantul lui $A(A^{-1} - \lambda I)$ unde dacă K este un subcorp a lui C să se utilizeze o matrice triunghiulară B cu termeni complecşi asemenea cu matricea A.

Scanned with OKEN Scanner

12. Să se calculeze urmele următoarelor matrice

a) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \frac{k_0 + k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k_0 + k}{m} \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a+b & a+b \\ a & a+b & a+b+c \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}$.

13. Să se determine ecuaţiile caracteristice ale matricelor din exerciţiul precedent, utilizînd metoda de recurenţă a lui Bôcher.

14. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai următoarelor matrici:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -7 & 4 & -4 & 4 \\ -8 & 5 & -6 & 6 \\ -2 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$;

15. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricelor:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

16. Să se calculeze valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & a_2 \\ -a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17. Se consideră matricea de ordinul n pe mulțimea numerelor reale

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 \quad 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & 1 \ldots 1 \end{vmatrix}$$

reprezentînd un endomorfism φ al unui spațiu vectorial de dimensiune n pe corpul numerelor reale. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricei M. Să se arate că se poate găsi în E o bază a vectorilor proprii; care este matricea M_1, a aplicației φ raportată la această nouă bază? Să se studieze după această matrice $\operatorname{Ker}\varphi$ și $\operatorname{Im}\varphi$; să se găsească o bază a acestor două subspații.

18. Să se determine coeficienții necunoscuți ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b' & c' \\ 3 & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

în așa fel ca ea să admită următorii vectori proprii:
$(1, 0, 1)$; $(-1, 1, 0)$; $(0, 1, -1)$.

IV. REDUCEREA LA FORMA DIAGONALĂ ȘI LA FORMA TRIUNGHIULARĂ

a. Un endomorfism u (sau o matrice pătrată A) este diagonalizabil sau triunghiularizabil, dacă există o bază a lui E (a lui $\mathbf{R}^n$) față de care matricea lui u (matricea $P^{-1}AP$ transformata lui A) este diagonală sau triunghiulară.

b. Un endomorfism u (sau o matrice pătrată A) este diagonalizabil, dacă și numai dacă există o bază a spațiului E (a lui $\mathbf{R}^n$) formată din vectorii proprii ai lui u (ai matricei A) sau încă dacă și numai dacă subspațiile proprii ale lui u (al matricei A) generează spațiul. În particular dacă polinomul caracteristic al lui u (sau al matricei A) are n zerouri distincte în $\mathbf{R}$, condiția precedentă este satisfăcută, endomorfismul u (sau matricea A) este diagonalizabil.

c. Cazul valorilor proprii multiple. Fie u un endomorfism avînd în total p valori proprii două cîte două distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Pentru ca u să fie diagonalizabil, este necesar și suficient, ca pentru orice indice $i \in [1, p]$, $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i e)$ să aibă o dimensiune egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_i. $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i e)$ se numește subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ_i.

19. Să se reducă la forma diagonală următoarele matrici

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

20. Să se reducă la forma diagonală matricele :

a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -2 & 6 \\ 7 & -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$.

21. Să se reducă la forma diagonală matricele :

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$.

22. Să se reducă la forma diagonală matricea :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}; \ (\varphi \neq k\pi).$$

23. Se consideră numerele reale α, β, γ și fie

$$U = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 1+\gamma^2 \end{bmatrix}$$

matricea asociată endomorfismului u al lui $\mathbf{R}^3$ relativ la baza canonică. Să se diagonalizeze.

24. Să se studieze diagonalizarea matricelor următoare :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie matricea :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că este diagonalizabilă. Să se determine o matrice de trecere permiţînd diagonalizarea.

26. Să se studieze diagonalizarea matricei A^2 unde A reprezintă matricea precedentă. Să se deducă expresia matricei A^2.

27. În ce condiţii matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{bmatrix}$$

este diagonalizabilă ?

d. Aplicaţiile diagonalizării. Diagonalizarea unui endomorfism u (sau a unei matrice pătrate A) dacă este posibilă, pune în evidenţă structura particulară simplă a acestui endomorfism.

Rezolvarea unei probleme în care intervine o matrice pătrată, utilizează de multe ori diagonalizarea matricei. Integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi reprezintă un exemplu important.

e. Puterea unei matrici. Determinarea puterii a n^{e} a unei matrici diagonale este imediată. Dacă matricea A este asemenea cu o matrice diagonală D, avem : $D = P^{-1}AP$, de unde $D^n = P^{-1}A^nP$, şi $A^n = PD^nP^{-1}$. Această metodă poate fi utilizată în particular pentru a calcula un polinom $f(A)$.

28. Se consideră matricea :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Să se determine valorile proprii ale matricei A.
b) Să se determine vectorii proprii.
c) Să se reducă matricea A la forma diagonală.
d) Să se calculeze A^3 şi A^4.

29. Să se calculeze puterea p a matricei :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şi să se arate că ea se poate scrie $A^p = a_pA + b_pI$ să se determine a_p şi b_p.

30. Să se calculeze puterea p a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

f. Fie E un spaţiu vectorial de dimensiune n pe corpul C, un endomorfism $u \in \mathcal{L}_c(E)$ se numeşte triunghiularizabil, dacă există o bază a lui E în raport cu care u este reprezentat printr-o matrice triunghiulară. Să presupunem u triunghiularizabil, există atunci o bază $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a lui E în care matricea lui u este:

$$T = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 0 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Atunci matricea $T - \lambda I$ este triunghiulară şi avem: $\det(T - \lambda I) = (a_1^1 - \lambda)(a_2^2 - \lambda)\ldots(a_n^n - \lambda)$. Elementele diagonalei principale ale unei matrici triunghiulare sînt valorile proprii ale lui T. Pentru că orice matrice diagonală este şi triunghiulară, orice endomorfism diagonalizabil este şi triunghiularizabil. Un endomorfism u (o matrice pătrată A) este triunghiularizabil, dacă şi numai dacă polinomul caracteristic $\Delta(\lambda)$ al lui u (sau al lui A) se descompune în K în factori de gradul întîi. În acest caz există o bază a lui E (a lui $\mathbf{R}^n$) astfel ca matricea lui u în această bază (matricea $P^{-1}AP$ transformata lui A) să aibă forma lui Jordan

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_q \end{bmatrix} \text{ unde } J_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_p & 1 \\ 0 & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

(λ_p sînt valorile proprii ale lui u sau A, mai multe matrici J_p pot avea aceeaşi valoare λ_p în diagonală).

31. Fie e_1 un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 a lui u; care este forma generală a matricei A a lui u în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$?

Se numeşte E_1 sub-spaţiul generat de $\{e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ şi se defineşte în E_1 un endomorfism u_1; transformatul $u_1(v)$ al lui $v \in E_1$ este obţinut proiectînd $u(v)$ pe E_1 paralel cu e_1. Să se găsească o matrice lui u_1; care este polinomul său caracteristic?

32. Fie e_2' un vector propriu al lui u_1, corespunzător valorii proprii λ_2. Se fixează în E baza $\{e_1', e_2', e_3', \ldots, e_n'\}$ unde $\{e_3', \ldots, e_n'\}$ generează un subspaţiu E_2 suplimentar lui e_2' în E_1. Care este matricea lui u în această bază? Se defineşte în E_2 un endomorfism u_2; transformatul $u_2(v)$ al lui $v \in E_2$ se obţine proiectînd $u(v)$ pe E_2 paralel cu $\{ke_1 + k'e_2'\}$. Care este polinomul caracteristic al lui u_2? Să se arate că operaţia precedentă poate fi continuată şi că după $n - 1$ operaţii cel mult ea conduce la o matrice triunghiulară pentru u.

33. Fie într-o bază dată, u endomorfismul de matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Să se arate că acest endomorfism nu este diagonalizabil. Să se determine o bază în care matricea este triunghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

34. Într-o bază $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a lui E se consideră endomorfismul $u \in \mathcal{L}_c(E)$ reprezentat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Să se triunghiularizeze.

35. Să se determine utilizînd triunghiularizarea, A_1^7 și A_2^7, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

f. Endomorfism nediagonalizabil. Un endomorfism diagonalizabil sau nu, admite o infinitate de forme triunghiulare (plasîndu-ne pe corpul numerelor complexe). Se poate căuta printre acestea unele care caracterizează endomorfismul în mod mai precis. Nu vom indica aici forma pe care o adoptăm cînd endomorfismul nu este diagonalizabil. În exerciţiile ce urmează această formă este dată. Este suficient de a determina noua bază utilizînd interpretarea clasică a coloanelor matricei.

36. Să se determine, pentru matricea A de mai jos, o bază în care matricea devine B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

37. Să se demonstreze că matricea

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$ este asemenea cu matricea $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

și să se determine o matrice de trecere.

38. Fie într-o bază (e_1, e_2, e_3), u endomorfismul de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

să se arate că această matrice nu este diagonalizabilă. Să se determine o bază în care matricea este triunghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

39. Fie într-o bază (e_1, e_2, e_3), u endomorfismul de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că această matrice nu este diagonalizabilă, să se determine o bază în care matricea este triunghiulară.

40. Să se studieze diagonalizarea matricei A de mai jos. Să se arate că ea este asemenea cu matricea B și să se determine o matrice de trecere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

41. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1) Să se determine o matrice triunghiulară B, asemenea cu A, adică egală cu $P^{-1}AP$.

2) Să se determine o matrice Jordan C asemenea cu matricea A (singurii termeni diferiți de zero în afara diagonalei sînt egali cu 1 și aparțin paralelei situată imediat deasupra diagonalei).

3) Să se calculeze C^n unde n este un întreg pozitiv și să se arate fără a efectua calculul, cum se poate obține A^n.

42. Se consideră matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricei A.

2) Să se determine o matrice inversabilă P, astfel ca matricea $J = P^{-1}AP$ să fie de forma Jordan.

3) Să se calculeze J^n și A^n.

43. Valorile proprii ale unei matrice simetrice sînt reale și direcțiile proprii sînt ortogonale două cîte două.

44. Valorile proprii ale unei matrice hermitiene sînt reale; direcțiile proprii corespunzătoare la două valori proprii diferite sînt fiecare ortogonală direcției complexe conjugate ale celeilalte.

Scanned with OKEN Scanner

45. Să se determine toate matricele pătrate de ordinul trei diagonalizabile, astfel că:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix} = B.$$

V. Teorema lui Cayley-Hamilton. Orice matrice pătrată satisface propriei sale ecuații caracteristice în sensul matricial.

46. Să se calculeze:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

CAPITOLUL II

CALCULUL FUNCȚIILOR PRIMITIVE

GENERALITĂȚI

Nu există o metodă generală pentru calculul primitivelor funcțiilor elementare sau a combinațiilor acestor funcții.

Tabloul derivatelor, ne dă, citit invers tabloul primitivelor. Metoda schimbării variabilei și metoda integrării prin părți permit reducerea unor integrale la cele din tabloul primitivelor. Dacă s-a obținut o primitivă, orice altă primitivă se deduce adăugînd o constantă. La toate rezultatele acestui capitol constanta arbitrară nu figurează.

Tabloul primitivelor:

1. $\int dx = x$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$
4. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a|$
5. $\int \frac{dx}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} (n \neq 1).$
6. $\int e^x dx = e^x$
7. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx}$
8. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x \quad a \neq 1$
9. $\int \cos x dx = \sin x$

Scanned with OKEN Scanner

10. $\int \sin x\, dx = -\cos x$

11. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax,\ a \neq 0$

12. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax,\ a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$

15. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|$

16. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x|$

17. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\cos x}$

18. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = -\frac{1}{\sin x}$

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

21. $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)|$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a},\ a \neq 0$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}} = \arcsin\frac{x-\alpha}{\beta},\ \beta \neq 0$

25. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

26. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},\ a \neq 0$

27. $\int \frac{dx}{\beta^2+(x-\alpha)^2} = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}$

28. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$

29. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$

30. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$

31. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arg\,sh} x$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a},\ a \neq 0$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| = \operatorname{argch} x$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| = \operatorname{argch}\frac{x}{a},\ a \neq 0$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|$

Observație. În formulele de la 32—36 în paranteză apare jumătatea derivației funcției de sub radical plus radicalul.

37. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,\ a \neq 0$

38. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|,\ a \neq 0$

39. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,\ a \neq b$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a},\ a \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

INTEGRAREA PRIN SUBSTITUȚII

Folosind metoda substituției, să se calculeze următoarele integrale:

47. $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 48. $\int x^2(1-\sqrt[3]{x})dx$; 49. $\int\frac{(1-\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

50. $\int\frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$; 51. $\int\frac{x^n dx}{ax^{n+1}+b}$; 52. $\int\sqrt[3]{x^3+4x+1}(3x^2+4)dx$;

53. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$; 54. $\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$; 55. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+a^4}}$; 56. $\int\sin^n x\cos x\,dx$;

57. $\int\sin ax\sin bx\,dx$; 58. $\int\cos ax\cos bx\,dx$; 59. $\int\sin ax\cos bx\,dx$;

60. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$; 61. $\int\mathrm{tg}^2 x\,dx$; 62. $\int\frac{\cos x}{\sin^n x}dx$; 63. $\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx$; 64. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

65. $\int\frac{\ln x}{x}dx$; 66. $\int\frac{(\ln x)^n}{x}dx$; 67. $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 68. $\int\frac{e^x dx}{1+e^x}$; 69. $\int\frac{x\,dx}{\ln(x^2)}$;

70. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 71. $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)^3}$; 72. $\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$; 73. $\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$;

74. $\int\frac{3x-1}{3x^2-2x+3}dx$; 75. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 76. $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; 77. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$;

78. $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2\frac{x}{2}}$; 79. $\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{x+\sin x}dx$; 80. $\int e^{1+x^2}x\,dx$; 81. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$;

82. $\int\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}dx$; 83. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$; 84. $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$; 85. $\int\frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3}$;

86. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}}$; 87. $\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}dx$; 88. $\int\frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$; 89. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 90. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

91. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 92. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$; 93. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$; 94. $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; 95. $\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$;

96. $\int\frac{dx}{x(ax^n+b)}$; 97. $\int\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$; 98. $\int\frac{e^x dx}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$; 99. $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$;

100. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$; 101. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; 102. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$; 103. $\frac{\sqrt{1+x^6}}{x}dx$;

104. $\int\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}dx$; 105. $\int x^2\sqrt{a+x}\,dx$; 106. $\int\frac{dx}{(1+x^2)(2x-\sqrt{1+x^2})}$;

107. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}$; 108. $\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; 109. $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^n}$; 111. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[n]{\sin x - \cos x}}dx$; 112. $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$;

113. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 114. $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; 115. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$; 116. $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+x^n+1}$;

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; 118. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; 119. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 120. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$;

121. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$; 122. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 123. $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$; 124. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

125. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$; 126. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$; 127. $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

128. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$; 129. $\int \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}x^2\,dx$; 130. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$;

131. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$; 132. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; 133. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$; 134. $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

135. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$; 136. $\int \frac{x(x^4+1)}{x^8+1}dx$; 137. $\int \frac{x(x^4-1)}{x^8+1}dx$; 138. $\int \frac{x^2(x^6+1)}{x^{12}+1}dx$;

139. $\int \frac{x^2(x^6-1)}{x^{12}+1}dx$; 140. $\int \frac{x^{n-1}(x^{2n}+1)}{x^{4n}+1}dx$; 141. $\int \frac{x^{n-1}(x^{2n}-1)}{x^{4n}+1}dx$.

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

142. $\int \ln x\,dx$; 143. $\int x^p \ln x\,dx (p \in \mathbf{R})$; 144. $\int xe^{ax}dx$; 145. $\int xa^x dx$;

146. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; 147. $\int x\sin x\,dx$; 148. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx$; 149. $\int \operatorname{argsh} x\,dx$;

150. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 151. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$; 152. $\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$;

153. $\int \cos x \ln(1+\cos x)dx$; 154. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 155. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$;

156. $\int x^2\ln(x^6-1)dx$; 157. $\int x^2e^{2x}dx$; 158. $\int (x^3+5x^2-2)e^{2x}dx$;

159. $\int e^x\cos^2 x\,dx$; 160. $\int e^{-x}\cos^3 x\,dx$; 161. $\int e^{\arcsin x}dx$; 162. $\int \frac{x\ln(1+x)}{(1+x)^3}dx$;

163. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; 164. $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$; 165. $\int x\operatorname{sh} x\,dx$; 166. $\int x^2\operatorname{ch} x\,dx$;

167. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 168. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; 169. $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

170. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 171. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 172. $\int \frac{2x\arcsin x}{(1+x^2)^2}dx$; 173. $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$;

174. $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$; 175. $\int (\arcsin x)^2dx$; 176. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$;

177. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$; 178. $\int x\,e^{x}\sin^2 x\,dx$; 179. $\int x\,e^{x}\cos^2 x\,dx$; 180. $\int \frac{\ln\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$;

181. $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\,dx$; 182. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; 183. $\int \cos x \ln(\operatorname{ctg} x)dx$;

184. $\int \sin x\ \ln(\operatorname{tg} x)dx$; 185. $\int \frac{x\,e^{\arcsin x}}{1-x^2}\,dx$; 186. $\int e^{\arcsin x}dx$;

187. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$; 188. $\int \frac{x\,e^{\arcsin x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$; 189. $\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\,dx$;

190. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arcsec}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx$; 191. $\int \frac{x(3-x^2)\operatorname{arctg} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$;

192. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$; 193. $\int \frac{x\,e^{x}}{\sqrt{1+e^{x}}}\,dx$; 194. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

INTEGRAREA PRIN RELAŢII DE RECURENŢĂ

195. $\int x^n e^x dx$; 196. $\int \ln^n x\,dx$; 197. $\int x^m \ln^n x\,dx$; 198. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$;

199. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; 200. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$; 201. $\int \frac{x^m\,dx}{(a^2+x^2)^n}$; 202. $\int \cos^n x\,dx$;

203. $\int \sin^n x\,dx$; 204. $\int \frac{dx}{\cos^n x}$; 205. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$; 206. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$;

207. $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$; 208. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$; 209. $\int x^n \sin x\,dx$;

210. $\int x^n \cos x\,dx$; 211. $\int e^{ax}\cos^n x\,dx$; 212. $\int e^{ax}\sin^n x\,dx$;

213. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$; 214. $\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n}$; 215. $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 216. $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

217. $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a+bx}}$; 218. $\int (\arcsin x)^n\,dx$; 219. $\int \frac{x^n\,e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; 220. $\int \frac{x^n\,e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$.

INTEGRAREA FRACŢIILOR RAŢIONALE

Metoda generală. Se descompune fracţia în elemente simple pe corpul realelor (elemente de prima şi a doua speţă) şi se integrează fiecare termen obţinut.

Cazul unei fracţii impare. Se poate pune totdeauna sub forma $\frac{P(x^2)}{Q(x^2)}\,x\,dx$ şi integrala $\int \frac{P(x^2)}{Q(x^2)}\,x\,dx$ se simplifică prin schimbarea de variabila $x^2 = t$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se integreze fracțiile raționale :

221. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$; 222. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$; 223. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$;

224. $\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,dx$; 225. $\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$; 226. $\int \frac{x^5+2}{x^5-x}\,dx$; 227. $\int \frac{x^4+1}{(x-1)^3}\,dx$;

228. $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 229. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$; 230. $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$; 231. $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^3-2}$;

232. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+3x^2+2}$; 233. $\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3}$; 224. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; 235. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$;

236. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2}$; 237. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; 238. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

Să se determine numerele p și q astfel ca

239. $\int \frac{x^2+px+q}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx$ să nu conțină funcții transcendente elementare.

240. $\int \frac{x^2-3x+1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$; 241. $\int \frac{dx}{x^3(1-x^3)}$; 242. $\int \frac{dx}{x^6-1}$; 243. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$;

244. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$; 245. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$; 246. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$;

247. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$; 248. $\int \left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2 \cdot dx$.

Metoda Hermite-Ostrogradski. Se consideră $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$, φ și f polinoame. Presupunem că $f(x) = 0$ are rădăcini multiple.

În acest caz avem :

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = \frac{\omega(x)}{D(x)} + \int \frac{\omega_1(x)}{D_1(x)}\,dx \qquad (1)$$

unde $D(x)$ este divizorul maxim al lui $f(x)$ și $f'(x)$, iar $D_1(x) = \frac{f(x)}{D(x)}$, $\omega(x)$ și $\omega_1(x)$ sînt polinoame care au gradul cu o unitate mai mic decît al numitorului respectiv.

Pentru determinarea polinoamelor $\omega(x)$ și $\omega_1(x)$ se derivează relația (1) și prin identificare se determină coeficienții polinoamelor $\omega(x)$ și $\omega_1(x)$.

Folosind metoda Hermite-Ostrogradski să se calculeze următoarele integrale :

249. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$; 250. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$; 251. $\int \frac{2x-1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx$;

252. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

Să se calculeze prin diverse metode următoarele integrale :

253. $\int \frac{x^5-x}{x^2+1}\,dx$; 254. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^3}$; 255. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^4}$;

256. $\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}\,dx$; 257. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx$;

Scanned with OKEN Scanner

258. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+1}\,dx$; 259. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+6x^2+1}\,dx$; 260. $\int \frac{x^4-3}{x(x^3+3x^4-2)}\,dx$:

261. $\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$; 262. $\int \frac{dx}{x(x^8+1)}$.

INTEGRAREA FUNCȚIILOR IRAȚIONALE

Nu este posibil totdeauna de a exprima integrala unei funcții iraționale cu ajutorul funcțiilor elementare. Vom studia aici acele funcții iraționale a căror integrare se reduce prin schimbări de variabile la integrale de funcții raționale.

I. Integralele de tipul

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$$

se raționalizează prin schimbarea de variabilă

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

unde k este numitorul comun al fracțiilor, $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

II. Integralele de tipul

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

se raționalizează prin substituțiile lui Euler:

1°. $a > 0$ se face $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$

2°. $a < 0$, $c > 0$ se face $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$

3°. x_1 și x_2 fiind rădăcinile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0$ se face $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$.

III. Integralele de tipul

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

numite integrale binome, m, n, p, numere raționale, pot fi raționalizate în următoarele trei cazuri:

1°. $p \in \mathbf{Z}$. Se face $x = t^q$, q numitorul comun al numerelor raționale m, n.

2°. $p \notin \mathbf{Z}$ dar $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$ în acest caz se face substituția

$$ax^n+b = t^s \text{ unde } p = \frac{r}{s}.$$

3°. $\frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$ dar $\frac{m+1}{n}+p \in \mathbf{Z}$ atunci se face substituția

$$\frac{ax^n+b}{x^n} = a+bx^{-n} = t^s$$

Scanned with OKEN Scanner

IV. $\int R(x, y)dx$ unde y este una din soluțiile ecuației algebrice (1) $F(x, y) = 0$ se raționalizează dacă curba (1) admite o reprezentare parametrică rațională (integrale abeliene).

Să se calculeze următoarele integrale:

263. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)} + \sqrt{(1+x)}}$; **264.** $\int \frac{3\sqrt[6]{x}}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$; **265.** $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}$;

266. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{1+x}}$; **267.** $\int \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} + 1} dx$; **268.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$;

269. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$; **270.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; **271.** $\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{2+x} dx$;

272. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$; **273.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3(4-x)}}$; **274.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-6)}}$; **275.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

276. $\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; **277.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}$; **278.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$;

279. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$; **280.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}}$; **281.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$;

282. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$; **283.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x} - 2}$; **284.** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$;

285. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; **286.** $\int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx$; **287.** $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx$;

288. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-1}}$; **289.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; **290.** $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}{\sqrt[3]{x^3}} dx$; **291.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

292. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; **293.** $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$; **294.** $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x^4})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

295. a. $\int \sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}} dx$; **295. b.** $\int \sqrt[n]{\frac{x}{1+x^{n+1}}} dx$; **296.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3}(1+\sqrt[3]{x^4})^{\frac{1}{4}}}$;

297. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; **298.** $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}} dx$.

Să se calculeze următoarele integrale abeliene:

299. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-x^3}}$; **300.** $\int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(x-1)}}$; **301.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$;

302. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{2x^2-x^3}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze următoarele integrale :

303. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+x^4}}$; 304. $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{x^6+x^3-2}}$; 305. $\int \frac{1+x^3}{x\sqrt{1+x^4}}\,dx$;

306. $\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx$; 307. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\,dx$; 308. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$.

Să se stabilească formulele de reducere :

309. $\int (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{x(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx$;

310. $I_n = \int x^n\sqrt{2ax-x^2}\,dx = -\frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2} + a\frac{2n+1}{n+1}I_{n-1}$.

INTEGRAREA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

Funcții raționale în $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Se știe că orice funcție rațională în $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$: $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$ poate fi transformată într-o fracție rațională de variabila t, notînd $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Cum această transformare conduce uneori la calcule complicate, trebuie examinată posibilitatea de a lua ca noi variabile una din cele trei funcții trigonometrice $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Se folosește regula : dacă elementul diferențial $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)dx$ rămîne invariant cînd asupra lui x se efectuează una din transformările liniare care lasă neschimbate succesiv una din funcțiile $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, alegerea acestei funcții ca nouă variabilă păstrează caracterul rațional al funcției de integrat.

În rezumat dacă $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)dx$ se păstrează prin schimbarea lui x în :

$$\pi - x, \qquad -x, \qquad \pi + x$$

se iau respectiv ca variabile :

$$\sin x, \qquad \cos x, \qquad \operatorname{tg} x$$

311. Să se calculeze integralele :

a) $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$; b) $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$; c) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}$; d) $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$;

e) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$; f) $\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{2\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$.

312. Să se calculeze integralele :

a) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$; b) $\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$; c) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$;

d) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$; e) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$.

313. Să se calculeze integrala :

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

314. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\,dx$; b) $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \cos x + 3 \sin x}\,dx$; c) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}\,dx$;

d) $\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3}\,dx$; e) $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2}\,dx$; f) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$;

g) $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}\,dx$.

315. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$; b) $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x}\,dx$.

316. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{dx}{\cos x \cos 2x}$; b) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$; c) $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos 2x}$; d) $\int \frac{\sin 2x}{\cos 3x}\,dx$; e) $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$;

f) $\int \frac{\sin x\,dx}{1 + \cos x + \cos 2x}$; g) $\int \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2}\,dx$; h) $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$;

i) $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}\,dx$.

317. Să se calculeze:

a) $A = \int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x + \cos x}$; $B = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x + \cos x}$; b) $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{\sin x + \cos x}$;

c) $\int \frac{\sin^2 x \cos x\,dx}{\sin x + \cos x}$.

318. Să se calculeze:

a) $A = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + \sin x}$; $B = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos x + \sin x}$;

b) $A = \int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}\,dx$; $B = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos 2x}$.

319. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$; b) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$; c) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$; d) $\int \frac{dx}{\cos^6 x + \sin^6 x}$;

e) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$; f) $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

320. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$; b) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$; c) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^3 x}$; d) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$;

e) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$; f) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}}$; g) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$; h) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$; i) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

Scanned with OKEN Scanner

321. Să se calculeze:

a) $\int \frac{\sin^3 x \cos^3 x\, dx}{\cos^8 x + \sin^8 x}$; b) $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}$; c) $\int \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx$.

322. Să se calculeze:

a) $\int \sin 5x \cos x\, dx$; b) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx$; c) $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$

d) $\int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) dx$; e) $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\, dx$.

323. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{\sin(x + a) \sin(x + b)}$; b) $\int \frac{dx}{\sin(x + a) \cos(x + b)}$; c) $\int \frac{dx}{\cos(x + a) \cos(x + b)}$

d) $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + a) dx$; e) $\int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx$.

Fracții raționale de chx, shx, thx. Metoda generală. Schimbarea de variabilă $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, conduce la o fracție rațională în t. Se poate lua ca variabilă $e^x = t$, calculele fiind uneori mai simple.

324. Să se calculeze:

a) $\int e^x \operatorname{ch} x\, dx$; b) $\int \frac{dx}{\operatorname{th}^2 x}$; c) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}$; d) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}$; e) $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - \operatorname{th} a}$;

f) $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$.

325. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$; b) $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{ch} x + c \operatorname{sh} x}$.

326. Să se calculeze:

a) $\int \operatorname{sh}^4 x\, dx$; b) $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$; c) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x}$; d) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$.

INTEGRAREA PRIN DIFERITE METODE

$P(x)$ fiind un polinom să se calculeze următoarele integrale:

327. $\int P(x) e^x\, dx$; **328.** $A = \int P(x) \sin x\, dx$; $B = \int P(x) \cos x\, dx$;

329. $A = \int P(x) e^x \sin x\, dx$; $B = \int P(x) e^x \cos x\, dx$.

Să se calculeze integralele:

330. $A = \int \cos x \operatorname{ch} x\, dx$; $B = \int \sin x \operatorname{sh} x\, dx$; $C = \int \cos x \operatorname{sh} x\, dx$;

$D = \int \sin x \operatorname{sh} x\, dx$;

Scanned with OKEN Scanner

331. $\int \frac{x^3\,dx}{(\cos x + x \sin x)^3}$; **332.** $\int \frac{x^3 dx}{(x\cos x - \sin x)^3}$; **333.** $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$;

334. $A = \int e^x \operatorname{th} x\,dx$; $B = \int e^{-x} \operatorname{th} x\,dx$; **335.** $A = \int e^x \operatorname{coth} x\,dx$;

$B = \int e^{-x} \operatorname{coth} x\,dx$; **336.** $\int \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}\,dx$; **337.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$;

338. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{3 + \cos^2 x}}$; **339.** $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx$; **340.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}$;

341. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **342.** $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx$; **343.** $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}\,dx$;

344. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$; **345.** $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$;

346. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$; **347.** $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$; **348.** $\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4} - x^2}}$;

349. a. $\int \frac{(ax^4 + 2bx^2 + a)dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$; **b.** $\int \frac{dx}{(1-x^3)\sqrt[4]{2x^3 - 1}}$;

c. $\int \frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}}$.

CAPITOLUL III

INTEGRALA DEFINITĂ. INTEGRALE GENERALIZATE

Funcţii în scară. Fie $[a, b]$ un interval închis şi mărginit aparţinînd lui **R**. *Se numeşte funcţie în scară pe* $[a, b]$ *orice funcţie numerică* φ, *pentru care* $[a, b]$ *poate fi împărţit într-un număr finit de subintervale în interiorul cărora* φ *are o valoare constantă.* O funcţie în scară φ pe $[a, b]$ nu poate lua decît un număr finit de valori şi nu poate avea decît un număr finit de puncte de discontinuitate.

Funcţii etajate. Se numeşte funcţie etajată pe $[a, b]$ orice funcţie numerică f, definită pe $[a, b]$ şi care este limita uniformă a unui şir φ_n de funcţii în scară pe $[a, b]$. Funcţiile continui şi funcţiile monotone sînt funcţii etajate.

Integralele funcţiilor în scară pe $[a, b]$. φ fiind o funcţie în scară pe $[a, b]$, $a < b$ luînd valoarea l_k pe intervalul deschis $]x_k, x_{k+1}[$. Se numeşte integrala lui φ pe $[a, b]$ numărul real :

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_k(x_{k+1} - x_k) : \; x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest număr se notează prin $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ sau prin $I(\varphi)$. Aşadar $I(\varphi) =$

$$= \int_a^b \varphi(x)dx = l_0(x_1 - x_0) + l_1(x_2 - x_1) + \ldots + l_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Dacă se notează $\mu_k = x_{k+1} - x_k$: $\mu_k > 0$ avem :

$I(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k\mu_k$. Dacă φ este integrabilă pe $[a, b]$ lui φ i se poate asocia numărul $I(\varphi)$.

Integralele funcţiilor etajate pe $[a, b]$. f fiind o funcţie etajată pe $[a, b]$, φ_n un şir de funcţii în scară pe $[a, b]$, convergent uniform pe $[a, b]$ către f, se numeşte integrala lui f pe $[a, b]$, limita integralelor $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ cînd $n \to \infty$.

Se scrie

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

sau

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n)$$

Integrala lui Riemann. Fie f o funcţie etajată pe $[a, b]$, φ o funcţie în scară astfel ca $||f - \varphi|| < \varepsilon$, adică $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$. Fie $x_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ punctele unde φ nu este continuă, şi pe orice interval $]x_k, x_{k+1}[$ să alegem un punct ξ_k oarecare. Se consideră funcţia în scară γ pe $[a, b]$ definită în modul următor : dacă $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $\gamma(x) = f(\xi_k)$ dacă $x = x_k$, $\gamma(x_k) = f(x_k)$. Într-adevăr dacă $x \in]x_k, x_{k+1}[$ avem $|\gamma(x) - f(x)| \leqslant |\gamma(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x)|$. Dar pe $]x_k, x_{k+1}[$, $|\gamma(x) - \varphi(x)| = |f(\xi_k) - \varphi(x)| = |f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)| < \varepsilon$ pentru că φ este constant pe $]x_k, x_{k+1}[$. Dar $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ deci pe $]x_k, x_{k+1}[$, $|\gamma(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. În punctul x_k avem $|\gamma(x) - f(x)| = |f(x_k) - f(x_k)| = 0 < 2\varepsilon$. Se poate enunţa rezultatul următor : f fiind o funcţie etajată dată ; se poate găsi o partiţie a lui $[a, b]$ cu ajutorul punctelor x_k şi o funcţie în scară γ a cărei valoare pe $]x_k, x_{k+1}[$ este o valoare oarecare a lui f în intervalul $]x_k, x_{k+1}[$ şi care aproximează uniform pe f.

După inegalitatea fundamentală:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant (b - a)||f||$$ şi din consecinţa sa:

$$\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right| \leqslant (b - a)||f - g||$$ se deduce :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \gamma(x)dx\right| \leqslant 2(b - a)\,\varepsilon.$$

Dar

$$\left|\int_a^b \gamma(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)\right.$$ după definiţia integralei unei funcţii în scară.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) \right| \leqslant 2\varepsilon(b - a)$$

$$\xi_k \in]x_k,\ x_{k+1}[.$$

Definiţia integralei lui Riemann. Fie f o funcţie numerică definită pe $[a, b]$. Se consideră toate partiţiile lui $[a, b]$ cu ajutorul unui număr finit de puncte. Pentru orice partiţie P definită prin

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Se consideră sumele

$$\sigma(P,\ f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

unde ξ_k este un punct oarecare al intervalului închis $[x_k, x_{k+1}]$. Dacă există un număr finit $I(f)$, astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să putem găsi o partiţie P astfel ca $|I(f) - \sigma(P, f)| < \varepsilon$, se spune că f este *integrabilă în sensul lui Riemann* şi că $I(f)$ este integrala sa. Se scrie :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Sumele $\sigma(P, f)$ se numesc sume Riemann.

VALOAREA MEDIE A UNEI FUNCŢII

Se consideră o diviziune a intervalului $[a, b]$ în n părţi egale şi şirul de numere $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ aşa fel ca ξ_k să aparţină subintervalului închis numerotat cu k al diviziunii.

Şirul mediilor

$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$ dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ are limită egală cu $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

SCHIMBAREA DE VARIABILĂ ÎN INTEGRALA DEFINITĂ

Dacă $x = \varphi(t)$ este o funcţie strict monotonă, având o derivată continuă atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta [f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \text{ unde } a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Formula mediei. Dacă m și M sînt marginile funcției f în $[a, b]$ și dacă $g > 0$ avem

$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$ care pentru $g(x) = 1$ se reduce la

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

Folosind noțiunea de integrală definită să se calculeze limitele expresiilor:

350. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

351. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

352. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\ldots+\frac{2}{4n-1}\right)$.

353. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

354. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

355. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

356. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

357. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$.

358. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

359. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{2(n-2)}+\ldots+\sqrt{p(n-p)}+\ldots+\sqrt{n-1})$.

360. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

361. Se consideră șirul $u_p = 1+\frac{p}{n}$, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1^{u_1}\cdot u_2^{u_2}\ldots u_n^{u_n}}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1^{u_1^2}\cdot u_2^{u_2^2}\ldots u_n^{u_n^2}}$.

362. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

363. Folosind definiția integralei pe un interval închis aparținînd lui **R** să se calculeze

$$\text{a)} \int_{-a}^{a} x^2\,dx. \qquad \text{b)} \int_{0}^{a} x^3\,dx. \qquad \text{c)} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx.$$

364. Se presupune că aplicația f a lui $[a, b]$ în **R** este etajată și că $f(a + b - x) = f(x)$; să se arate că:

$$\int_a^b x\,f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

365. 1) Să se demonstreze că dacă $f(x) = P(x) + iQ(x)$ este o funcție complexă de variabilă reală x integrabilă avem:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.$$

Înlocuind f prin f^2 să se demonstreze inegalitatea lui Schwarz

$$\left|\int_\alpha^\beta P\cdot Q dx\right|^2 \leqslant \int_\alpha^\beta P^2dx\cdot\int_\alpha^\beta Q^2dx.$$

366. 1) Fie p și q două numere mai mari ca 1, astfel ca

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Să se demonstreze că dacă a și b sînt două numere pozitive atunci

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

cum trebuie alese a și b pentru a avea egalitate? cazul $p = q = 2$.

2) Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții integrabile pe un interval $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. Să se deducă din inegalitatea de mai sus următoarea inegalitate:

$$\left|\int_\alpha^\beta fg\,dx\right| \leqslant \left(\int_\alpha^\beta |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

367. 1) Să se arate că dacă funcțiile f și g sînt definite și continui pe intervalul $[a, b]$ egalitatea

$$\Delta = \left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2 - \int_a^b [f(x)]^2dx\cdot\int_a^b [g(x)]^2dx$$

are drept consecință existența unui număr real λ astfel ca $f = \lambda g$.

2) Utilizînd inegalitatea lui Schwarz să se determine minimul produsului

$$P_f = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx$$

definit în mulțimea C^1 a funcțiilor f continui și strict pozitive pe $[a, b]$ (se vede că aplicația $f \to P_f$ este o aplicație a lui C^1 în **R**. Pentru ce funcții f, minimul este atins?

3) Să se arate că produsul P_f nu este mărginit superior.

Scanned with OKEN Scanner

368. 1) Se notează cu f o funcţie definită şi continuă pe intervalul $[a, b]$ şi se consideră un şir de subdiviziuni σ_n a intervalului $[a, b]$ în aşa fel că dacă l_n este marginea superioară a lungimilor intervalelor lui σ_n, şirul l_n are ca limită pe zero. Să se arate că dacă în fiecare interval $[x_{i-1}^{(n)} - x_i^{(n)}]$ al subdiviziunii σ_n se ia ca valoare $\xi_i^{(n)}$, şirul sumelor

$$S_n = \sum [x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}] \, f(\xi_i^{(n)}) \quad \text{are ca limită} \quad \int_a^b f(x)dx$$

Ce se obţine în particular dacă σ_n este subdiviziunea intervalului $[a, b]$ în n intervale egale şi dacă $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$?

2) Numărul real a fiind mai mare ca 1 să se arate că şirul $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ are ca limită $\int_1^a \frac{dx}{x}$. Se consideră subdiviziunile σ_n definite prin $a^{\frac{1}{n}}$.

3) Să se arate că rezultatul precedent are drept consecinţă derivabilitatea acestei funcţii pentru valoarea zero.

Să se calculeze următoarele integrale definite :

369. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} x \arcsin(x^2 - 4)dx$; **370.** $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1 + \sqrt{\ln x})^3} dx$; **371.** $\int_{-1}^0 \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$;

372. $\int_0^1 \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{2(x^2 + 1)}} dx$; **373.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + \sin^2 x}$; **374.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 + b^2 - 2ab \cos x}$;

375. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$; **376.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x + c)^2}$;

$$a, \; b, \; c \in \mathbf{R}_+ \text{ şi } c^2 > a^2 + b^2$$

377. Să se calculeze integralele :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n + 1)x}{\sin x} dx; \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx;$$

şi să se deducă valoarea integralei

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4n + 1)x}{\cos x} dx.$$

378. Să se arate că $\int_1^7 \sqrt{(x - 1)(7 - x)}dx = \int_{-1}^5 \sqrt{(x + 1)(5 - x)}dx$.

379. f şi g fiind integrabile pe $[a, b]$ să se arate că

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

Scanned with OKEN Scanner

380. Să se stabilească formulele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(b-x)dx \tag{2}$$

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx \tag{3}$$

Folosind formulele precedente să se calculeze

381. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x\,dx$; **382.** $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;

383. $I = \int_0^{2a} (2ax - x^2) \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$;

384. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$; **385.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$;

386. $I_n = \int_0^{\pi} x \sin^n x\,dx$

387. a) Să se stabilească formula de recurență între $I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,dx$ și $I_{\alpha-2}$, unde α înseamnă un număr real oarecare superior lui 1. Să se deducă valoarea lui I_α dacă α este un întreg pozitiv.

b) Să se arate că I_n este o funcție descrescătoare de n. Să se găsească limita lui $\frac{I_n}{I_{n-2}}$ și a lui $\frac{I_n}{I_{n-1}}$ cînd $n \to \infty$.

Să se arate că expresia

$$nI_nI_{n-1}$$

este independentă de n. Care este valoarea sa? Să se deducă partea principală a lui I_n pentru n infinit.

Folosind integrarea prin părți să se demonstreze existența integralelor.

388. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx$; **389.** $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$; **390.** $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

391. Se consideră o funcție f definită, continuă strict crescătoare pe $[0, a]$ și nulă pentru valoarea 0, se notează prin g funcția reciprocă a lui f.

1) Se definește o funcție F pe $[0, a]$ prin

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că F este derivabilă și are o derivată nulă :
— întîi presupunînd funcția f derivabilă ;
— apoi direct în cazul general utilizînd definiția derivatei.
Care este valoarea lui $F(x)$?

2) Să se arate că :

$$0 \leqslant u \leqslant a \text{ și } 0 \leqslant x \leqslant f(a)$$

$$uv \leqslant \int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(t)dt.$$

Să se folosească acest rezultat pentru a regăsi inegalitatea demonstrată la exercițiul 366.

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \text{ dacă } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

392. Se notează cu I_n integrala

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx.$$

1) Să se calculeze I_0 și I_1. Să se stabilească o relație între I_n și I_{n+2} și să se utilizeze această relație pentru calculul lui I_n.

2) Să se arate că șirul I_n este descrescător și are limita 0.

393. Dacă funcțiile f și g sînt continui pe intervalul $[a, b]$ și dacă f este monotonă există un număr $\xi \in [a, b]$ astfel ca :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\cdot\int_a^\xi g(t)dt + f(b)\cdot\int_\xi^b g(t)dt.$$

1) Să se demonstreze teorema, presupunînd că funcția f admite în complementara Ω a unei mulțimi finite Φ o derivată mărginită și continuă f' și că funcția f' admite limite la dreapta și la stînga în punctele lui Φ. Se va putea folosi pentru demonstrație o integrare prin părți.

2) Să se demonstreze că teorema rămîne adevărată dacă funcția f este limita uniformă a unui șir de funcții $f(x)$ verificînd ipotezele de la nr. 1.

394. Se dă integrala

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{(1 - x^2)dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}}$$

1) Să se arate că

$$I(a, b) = I(-b, -a)$$

și că dacă a și b sînt de același semn

$$I(a, b) = I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

Să se stabilească că $I\left(a, \frac{1}{a}\right) = 0$.

2) Să se calculeze $I(a, b)$. Se va putea trata cazul cînd a și b sînt mai mari ca 1 și să se ia ca variabilă $t = x + \frac{1}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

395. 1) Să se exprime $\cos^{2p} t$ ca o combinație liniară de exponențiale cu exponenți imaginari și să se utilizeze acest rezultat pentru a calcula integrala

$$I_p = \int_0^{2\pi} \cos^{2p} t \, dt$$

2) Să se demonstreze fără a utiliza rezultatul de la 1) relația:

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$$

și să se regăsească astfel valoarea lui I_p.

3) Să se arate că funcția F definită prin

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)dt$$

este definită în intervalul $]-1, 1[$ și desfășurabilă în serie întreagă în acest interval.

4) Să se dea desfășurarea în serie întreagă a derivatei F' a funcției F. Să se definească F', apoi F cu ajutorul funcțiilor elementare.

INTEGRALE GENERALIZATE

1) Integrale pe intervale infinite

Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, \infty[$ prin definiție

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{l\to\infty} \int_a^{l} f(x)dx \tag{1}$$

Dacă limita există, se spune că integrala este convergentă sau că are sens, în caz contrariu integrala este divergentă sau că nu are sens.

Dacă $|f(x)| < F(x)$ și dacă $\int_a^{\infty} F(x)dx$ este convergentă atunci și (1) este convergentă (criteriul comparației).

Dacă $f(x) \geqslant 0$ și dacă $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = A$ (finit), pentru $\alpha > 1$ integrala (1) este convergentă, iar pentru $\alpha \leqslant 1$ și $A \neq 0$ divergentă.

2) Dacă $f(x)$ nu este mărginită în orice vecinătate a unui punct $c \in [a, b]$ dar este continuă pe $a \leqslant x < c$ și $c < x \leqslant b$ atunci prin definiție

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{2}$$

Dacă cele două limite există și sînt finite, integrala (2) este convergentă, în caz contrar este divergentă.

Dacă $|f(x)| \leqslant F(x)$ pentru $x \in [a, b]$ și $\int_a^b F(x)dx$ este convergentă, integrala (2) este convergentă.

Dacă $f(x) \geqslant 0$ și dacă $\lim_{x\to c}(c - x)^{\alpha} f(x) = A$ (finit), atunci pentru $\alpha < 1$ integrala este convergentă, iar pentru $\alpha \geqslant 1$, și $A \neq 0$, divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Să se cerceteze convergenta următoarelor integrale:

396. $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}}$, $x_0 > a > b > 0$;

397. $\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$;

398. $\int_0^{\infty} \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x^2}$; **399.** $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; **400.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$;

401. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $k^2 < 1$; **402.** $\int_0^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}}$; **403.** $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

404. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$; **405.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2\theta - k^2) d\theta$, $k^2 < 1$; **406.** $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$

407. Să se arate că integrala lui Euler de speţa a doua (funcţia gama)

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

este convergentă pentru $p > 0$.

408. Să se arate că integrala lui Euler de prima speţă (funcţia beta)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

este convergentă pentru $p > 0$, $q > 0$.

409. 1) Să se arate că

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^{2n} x \, dx$$

este convergentă.

2) Să se calculeze I_n pornind de la o relaţie de recurentă între I_n şi I_{n-1} şi să se deducă că avem

$$0 < I_n < A \text{ cu } A = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

3) Să se studieze limita lui A pentru n infinit, deducînd pe aceea a lui I_n.

410. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă şi cu derivată integrabilă, să se calculeze:
$\lim n\Delta_n$ unde

$$\Delta_n = \int_a^b F(x) dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

411. Fie f o funcție definită pentru $x \geqslant 0$, pozitivă și tinzînd către zero cînd $x \to +\infty$.

Se presupune că $\int_0^{\infty} f(x)dx$ este divergentă.

Se consideră seria cu termenul general $u_n = f(n)$.

1) Să se arate că seria cu termenul general $V_n = u_n - u_{n+1}$ este convergentă. Să se deducă că seria cu termenul general

$$W_n = u_n - \int_n^{n+1} f(x)dx$$

este convergentă.

2) Fie $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Să se arate că $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\int_0^n f(x)\,dx} = 1$.

412. Fie o funcție f definită și integrabilă pe $[a, b[$.

1) Să se arate că dacă $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă atunci și $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă. (Se spune în acest caz că a doua integrală este absolut convergentă.)

2) Să se studieze convergenta integralelor

$$I = \int_0^1 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ și } J = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$$

3) Folosind o integrare prin părți să se arate că

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ este convergentă (simplu) adică}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \text{ este divergentă.}$$

413. Fie a un real pozitiv inferior lui 1.

Să se verifice că integrala

$$I(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot \ln x} \text{ este convergentă}$$

Să se determine $\lim_{a\to 0+0} I(a)\cdot \ln a$.

414. 1) Să se demonstreze convergența seriei cu termenul general

$$u_n = \sum_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{l \sin l}{1 + l^2}\,dl$$

Scanned with OKEN Scanner

și să se deducă din acest rezultat convergența integralei

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{1 + t^3} \, dt$$

2) Să se arate că seria cu termenul general u_n și integrala I nu sînt absolut convergente.

3) Să se arate că se obțin aceleași rezultate pentru integrala

$$\int_a^{\infty} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t \, dt \text{ unde } A \text{ și } B \text{ sînt două polinoame}$$

astfel ca gr B = gr A + 1 și dacă a este un număr strict superior zerourilor lui B.

415. Să se arate că funcția f definită dacă $|x| < 1$ prin $f(x) = \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x^4}}$ este integrabilă în intervalul [0, 1[și să se calculeze $I = \int_0^1 f(x)dx$.

416. 1) Fie P și Q două polinoame și a un real strict superior rădăcinilor reale ale lui Q. Să se arate că dacă grad $P \leqslant$ grad $Q - 2$ integralele

$$\int_a^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \sin t \, dt \text{ și } \int_a^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cos t \, dt$$

sînt absolut convergente.

2) Integrînd prin părți să se arate că $I = \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{1 + t^3} \, dt$ este convergentă

3) Să se arate că procedeul de la 2) poate fi aplicat integralelor

$$\int_a^{\infty} \frac{A(t)}{B(t))} \sin t \, dt \text{ dacă } A \text{ și } B \text{ sînt polinoame astfel}$$

ca grad A = grad $B - 1$ definit la 1°.

417. Fie φ o funcție definită pe [0, ∞[continuă, pozitivă, descrescătoare și tinzînd către zero pentru x infinit. Ne propunem să studiem convergența integralei.

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin x \, dx.$$

Se asociază seria (u_n) de termen general

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \varphi(x) \sin x \, dx$$

Să se demonstreze că seria este convergentă. Să se deducă convergența integralei.

Scanned with OKEN Scanner

418. Să se studieze convergenţa absolută a integralei

$$I = \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad a \text{ şi } n \text{ numere reale pozitive.}$$

Caz particular $a = 0$.

Să se deducă convergenţa integralelor lui Fresnel

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx \text{ şi } \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx$$

Să se arate că următoarele integrale generalizate sînt convergente şi să se calculeze:

419. $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx, \quad a < b;$ **420.** $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b;$

421. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}};$ **422.** $\int_0^{-1} \frac{3x^2-1}{\sqrt{x(x^2-1)}} \arcsin \frac{x+1}{x-1}\,dx;$

423. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x\,dx;$ **424.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx;$ **425.** $\int_0^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx;$

426. Să se calculeze $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3dx}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}$, $\alpha \neq k\pi$ şi să se deducă valorile integralelor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+1}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}.$$

Să se calculeze

427. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-4\cos x};$ **428.** $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{5-4\cos x};$ **429.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2};$ **430.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x};$

431. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x};$ **432.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)};$

433. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(5-4\cos x)^2};$ **434.** $\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\,dx;$

435. Să se arate că $I = \int_0^{\infty} \operatorname{arccotg} x^2\,dx$ există şi să se calculeze valoarea sa.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

FUNCŢII EULERIENE

1) Funcţia Γ. Relaţia de recurenţă. Se numeşte integrala euleriană de a doua speţă, integrala :

$$1)\quad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

Această integrală este o funcţie de parametrul p. Ea converge la infinit oricare ar fi p şi în origine dacă $p > 0$. Ea nu este definită decît dacă $p > 0$.

Se observă că $\Gamma(1) = 1$. Integrînd prin părţi se obţine

$$2)\quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$ relaţia de recurenţă a funcţiei Γ.

Această relaţie permite a calcula valorile funcţiei într-un punct oarecare p, cînd valorile funcţiei Γ sînt cunoscute într-un interval de amplitudine 1, de exemplu $1 \leqslant p < 2$. Dacă în particular p are o valoare întreagă n, avem $\Gamma(n+1) = n!$ Făcînd schimbarea de variabilă $x = t^2$ rezultă :

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty t^{2p-1} e^{-t^2} dt$$

în particular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (Integrala lui Gauss)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Dacă n este un număr întreg, formula de recurenţă permite de a calcula $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$; avem :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

deci :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1\cdot 3\cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

2) Prelungirea funcţiei $\Gamma(p)$ prin valorile negative ale lui p.

Formula $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ nu are sens decît dacă $p > 0$, pentru că $\Gamma(p)$ este reprezentată de integrala 1). Să presupunem că $-1 < p < 0$, $\Gamma(p+1)$ este atunci bine definit şi formula de recurenţă poate servi la extinderea definiţiei funcţiei $\Gamma(p)$ la valorile lui p cuprinse între -1 şi 0. Vom conveni a defini funcţia $\Gamma(p)$:

printr-o integrală euleriană dacă $p > 0$
prin formula de recurenţă 2).

Această formulă ne dă valorile lui $\Gamma(p)$ dacă $-1 < p < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste valori fiind cunoscute simbolul $\Gamma(p+1)$ este definit pentru $-2 < p < -1$ şi formula de recurenţă permite a calcula $\Gamma(p)$ în acest nou interval. Din aproape în aproape se defineşte astfel $\Gamma(p)$ pentru toate valorile lui p excepţie făcînd $p = 0$ şi valorile întregi şi negative ale lui p. Într-adevăr, dacă p tinde către 0, $\Gamma(p)$ creşte la infinit prin valori pozitive. Prin urmare cînd p tinde către -1, $\Gamma(p)$ creşte la infinit prin valori negative şi aşa mai departe. Se poate scrie:

$\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+n+1)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$ şi a defini direct $\Gamma(p)$ în intervalul $-(n+1) < p < -n$; cînd $p \to -n$

$\Gamma(p+n+1) \to 1$ şi $\lim\limits_{p \to -n}(p+n)\Gamma(p) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$

În vecinătatea lui $p = -n$, infinitul mare $\Gamma(p)$ are deci ca parte principală $\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{p+n}$.

Se obţine:

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}.$$

De exemplu:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

3) **Funcţia B.** Funcţia euleriană B este definită prin integrala:

$$B(p, q) = \int_0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

ea există dacă $p > 0$ şi $q > 0$. Schimbarea de variabilă $t = 1 - u$, arată că $B(p, q) = B(q, p)$. Funcţia B se reduce la funcţia Γ.

Într-adevăr $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Se consideră integrala dublă:

$$I = \iint_D t^{p-1}e^{-t}u^{q-1}e^{-u}dt\,du$$

domeniul (D) fiind primul cadran al planului (u, t). Funcţia de integrat este pozitivă. Existenţa integrală este asigurată, dacă există un mod de calcul, calculul lui I în coordonate carteziene arată că $I = \Gamma(p)\ \Gamma(q)$. Ştim deci că integrala dublă generalizată I are sens. Se poate deci calcula cu ajutorul unei schimbări de variabile: $t+u=\alpha$; $\dfrac{t}{u} = \beta$ aşadar $t = \dfrac{\alpha\beta}{1+\beta}$; $u = \dfrac{\alpha}{1+\beta}$.

Iacobianul acestei transformări este $J = \dfrac{D(u, t)}{D(\alpha, \beta)} = \dfrac{\beta}{(1+\alpha)^2}$. Pe de altă parte domeniului $D(t > 0,\ u > 0)$ îi corespunde domeniul $D'(\alpha > 0,\ \beta > 0)$, adică primul cadran al planului α, β. Corespondenta este biunivocă, iacobianul J este pozitiv şi mărginit în orice domeniu interior primului cadran. Excepţie

Scanned with OKEN Scanner

făcînd punctul $t = 0$, $u = 0$ care are ca imagine un punct oarecare al axei β. Se poate deci aplica regula schimbării de variabilă în integralele duble.

$$I = \iint_{D'} \frac{\alpha^{p-1}\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p-1}} \frac{\alpha^{q-1}}{(1+\beta)^{q-1}} e^{-\alpha} \frac{\alpha}{(1+\beta)^{2}} d\alpha \cdot d\beta =$$

$$= \iint_{D'} \frac{\alpha^{p+q-1}\beta^{p-1}e^{-\alpha}}{(1+\beta)^{p+q}} d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta \int_0^{\infty} \alpha^{p+q-1}e^{-\alpha}d\alpha$$

Aşadar $\Gamma(p)\ \Gamma(q) = \Gamma(p+q)\int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta$, de unde

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $1 + \beta = \frac{1}{1-t}$, deci $\beta = \frac{t}{1-t}$; dacă β variază de la 0 la $+\infty$, t variază de la 0 la 1 şi se obţine

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta = B(p, q)$$

4) Formula complementelor. Dacă în particular $q = 1 - p$, $0 < p < 1$, avem $\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta$

Integrala din membrul al doilea poate fi calculată. Ea are valoarea $\frac{\pi}{\sin p\pi}$, deci $\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Vom demonstra formula complementelor, folosind o dezvoltare a unei funcţii în serie Fourier.

Să se desfăşoare în serie Fourier funcţia $f(x) = \cos px$, periodică de perioadă 2π; dacă $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (p fiind un număr dat diferit de un întreg). $f(x)$ este o funcţie pară, continuă a cărei derivată admite puncte de discontinuitate de prima speţă. Vom avea o dezvoltare de forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

a_n tinzînd către zero ca şi $\frac{1}{n^2}$. Se obţine

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \cos px \cos nx\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(p+n)x\, dx + \int_0^{\pi} \cos(p-n)x\, dx =$$

$$= \left| \frac{\sin(p+n)x}{p+n} + \frac{\sin(p-n)x}{p-n} \right|_0^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \sin p\pi \left(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n} \right)$$

$$a_n = \frac{2p}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2} \text{ deci}$$

$$f(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2-1} \cos x + \ldots + 2p \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \cos nx + \ldots \right] = \cos px$$

făcînd $x = 0$ în formula precedentă rezultă :

1) $$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \frac{2p}{1-p^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{2p}{n^2-p^2} + \ldots$$

formulă valabilă dacă p nu este un întreg.

Se observă că :

$$\frac{2p}{n^2-p^2} = \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n-1+1-p} - \frac{1}{n+p}$$

notînd prin $f(p)$ suma seriei alternate.

2) $$f(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+p} + \ldots$$

se observă că :

3) $$\frac{\pi}{\sin p\pi} = f(p) + f(1-p)$$

Să revenim la integrala $\int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta$, care poate fi scrisă :

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta = \int_0^{1} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta + \int_1^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta$$

în a doua integrală schimbînd β în $\frac{1}{\beta}$ ea devine :

$$\int_0^{1} \frac{\beta^{-p}}{1+\beta} d\beta, \text{ aşadar } \int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta = \int_0^{1} \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta + \int_0^{1} \frac{\beta^{-p}}{1+\beta} d\beta$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd :

4) $g(p) = \int_0^1 \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta}\, d\beta$, avem :

5) $\int_0^\infty \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta}\, d\beta = g(p) + g(1-p)$

Vom arăta că funcțiile $g(p)$ și $f(p)$ sînt identice. Comparînd expresiile 3) și 5) formula complementelor este stabilă.

Avem :

6) $\frac{1}{1+\beta} = 1 - \beta + \ldots + (-1)^n \beta^n + \frac{(-1)^{n+1}\beta^{n+1}}{1+\beta}$

înmulțind cei doi membri ai egalității 6) prin β^{n-1} și integrînd de la 0 la 1, avem :

$$g(p) = \int_0^1 \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta}\, d\beta = \int_0^1 \beta^{p-1} \cdot d\beta + \ldots + (-1)^n \int_0^1 \beta^{n+p-1} d\beta + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{\beta^{n+p}}{1+\beta}\, d\beta$$

Așadar

$$g(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+p} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{\beta^{n+p} d\beta}{1+\beta}$$

pentru ca $g(p)$ să fie suma seriei $(-1)^n \frac{1}{n+p}$, este suficient ca integrala cu elemente pozitive

$\int_0^1 \frac{\beta^{n+p}}{1+\beta}\, d\beta$ să tindă către 0, cînd $n \to \infty$. Dar dacă $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\frac{1}{1+\beta}$ este cel mult egal cu 1. Această integrală este inferioară integralei $\int_0^1 \beta^{n+p}\, d\beta =$

$= \frac{1}{n+p+1}$ mărime care tinde către zero cînd $n \to \infty$. Rezultă deci :

$g(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+p} + \ldots$ formula complementelor este demonstrată.

Să se calculeze următoarele integrale :

436. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$; 437. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$; 438. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^3}\, dx$;

439. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$; 440. $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1+x^4}$; 441. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$; 442. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$;

443. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}$; 444. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{(1+x^2)^2}$; 445. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2}}$; 446. $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2}$;

Scanned with OKEN Scanner

447. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^6)^2}$; 448. $\int_0^1 x\sqrt{x^3(1-x)}dx$; 449. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;

450. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx$; 451. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cos^{n-1} x\, dx$; 452. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\varphi\, d\varphi$;

453. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$; 454. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p \varphi d\varphi$, $(|p|<1)$; 455. $\int_0^{\infty} x^{2n}\cdot e^{-x^2} dx$;

456. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n}$, $n>0$

457. Să se calculeze integrala $I(m, n) = \int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx$ şi să se aplice rezultatul la calculul integralelor

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx \text{ şi } \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

458. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} \frac{dx}{x+\alpha}$, $(0<p<1)$, unde α este un număr real exterior intervalului $(-1, 0)$.

Să se calculeze integralele:

459. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1} dx$; 460. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$; 461. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$;

462. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx$; 463. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}\, dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$; 464. $\int_{-1}^1 x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$;

465. $\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx$;

466. Să se calculeze aria buclei curbei

$$\rho = a\sqrt[4]{\sin^3\theta \cos\theta}.$$

467. Să se calculeze aria mărginită de curba:

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}.$$

468. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene, care are forma buclei curbei

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

FUNCȚII DEFINITE PRINTR-O INTEGRALĂ

1. Cazul unei integrale ordinare. Fie f o funcție de variabile x și t, definită $\forall x \in [\alpha, \beta]$, și $\forall t \in [a, b]$, această funcție este presupusă continuă în raport cu ansamblul variabilelor în domeniul $\Delta = [\alpha, \beta] \times [a, b]$. Fie funcția :

$$I(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

ea are următoarele proprietăți :

1) $I(x)$ este o funcție continuă de x în intervalul $[\alpha, \beta]$

2) Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}$ există și este continuă în Δ, $I(x)$ este derivabilă în orice punct al intervalului $[\alpha, \beta]$. Atunci. $I(x)$ este de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$ și avem :

$$I'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

(derivata sub semnul integral).

3) Dacă x_0 și x_1 sînt două valori interioare intervalului $[\alpha, \beta]$ avem

$$\int_{x_0}^{x_1} I(x)dx = \int_a^b dt \int_{x_0}^{x_1} f(x, t)dx$$ (integrarea sub semnul integral).

2. Integrale cu limite variabile. Fie integrala

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)dt$$

Se presupune că $f(x, t)$ este o funcție continuă de x și t într-un interval convenabil de variație a lui t, conținînd $a(x)$ și $b(x)$ și un interval de variație $[\alpha, \beta]$ a lui x în care $a(x)$ și $b(x)$ sînt funcții derivabile. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}$ există și este o funcție continuă de x și t, $I(x)$ este derivabilă în orice punct al intervalului $[\alpha, \beta]$. Atunci $I(x)$ este de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$ și avem :

$$I'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + b'(x)f[x, b(x)] - a'(x)f[x, a(x)]$$

Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea sub semnul integral

469. $I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, \quad m \in \mathbf{R}_+ ;$

470. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \frac{dx}{\sin x} ; \quad |a| < 1 ;$

Scanned with OKEN Scanner

471. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx$, $|a| < 1$; **472.** $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx$, $a > 1$;

473. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$; **474.** $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \sin x)}{\sin x}\,dx$;

475. $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)dt$, $|x| < 1$; **476.** $I(a) = \int_0^{a} \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2}\,dx$.

477. Din valoarea integralei $I(a, b) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$, $(a>0, b>0)$ să se deducă utilizînd derivarea sub semnul integral, valoarea integralei

$$J(a, b) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$$

478. λ fiind un număr pozitiv dat, să se calculeze integrala $f(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + \lambda}$. Să se deducă valoarea integralei:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + \lambda)^2}$$

479. Să se exprime integrala definită $I_n = \int_0^{a} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$ folosind funcţia $J(x) = \int_0^{a} \frac{dt}{x + t^2}$. Să se deducă calculul lui I_n şi să se aplice pentru I_2.

480. Se consideră următoarele două funcţii de x

$$f(x) = \left(\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt\right)^2 \text{ şi } g(x) = \int_0^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\,dt$$

Să se calculeze derivatele acestor funcţii şi să se arate că între ele există relaţia $f(x) + g(x) = c$, unde c este o constantă care se va determina. Care este limita funcţiei $g(x)$ cînd x tinde către ∞. Să se deducă valoarea integralei $\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$.

Scanned with OKEN Scanner

481. Să se calculeze, folosind sau nu derivarea sub semnul integral, derivata funcției

$$f(x) = \int_x^{2x} \cos(x + t) \ln xt \, dt$$

3. Funcții definite printr-o integrală generalizată

Fie $\int_a^{\infty} f(x, t)dt$ sau $\int_a^{b} f(x, t)dt$, o integrală generalizată depinzînd de parametrul x, presupusă convergentă pentru $\forall x \in [\alpha, \beta]$; integrala definește o funcție $I(x)$.

Proprietățile reamintite mai sus în cazul integralelor ordinare nu sînt în mod necesar valabile și în acest caz; în particular continuitatea poate să nu fie verificată pe întreg intervalul de definiție. Situația este analoagă cu aceea întîlnită la șirurile de funcții. În acest caz se pot da condițiile suficiente care asigură continuitatea și derivabilitatea. Se va utiliza convergența uniformă. Să examinăm cazul integralei $\int_a^{\infty} f(x, t)dt$, convergența integrale $\int_a^{\infty} f(x, t)dt$ către $I(x)$ este uniformă dacă ea poate fi realizată independent de alegerea lui x în $[\alpha, \beta]$. Mai precis aceasta se scrie

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\forall T$; $T > T_0$ are drept consecință:

$$| I(x) - \int_a^{T} f(x, t)dt | = | \int_T^{\infty} f(x, t)dt | < \varepsilon$$

condiția precedentă valabilă în mod uniform pentru $x \in [\alpha, \beta]$ este echivalentă cu următoarea: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_0$, $\forall T : T > T_0$ avem:

$$1) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} | I(x) - \int_a^{T} f(x, t)dt | = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} | \int_T^{\infty} f(x, t)dt | < \varepsilon$$

Se demonstrează următoarele rezultate:

1) Continuitatea: Dacă $\int_a^{\infty} f(x, t)dt$ este uniform convergentă pentru $x \in [\alpha, \beta]$ și dacă f este continuă pentru $x \in [\alpha, \beta]$ și $t \geqslant a$, funcția $I(x)$ este continuă.

2) Derivabilitatea: dacă $\int_a^{\infty} f(x, t)dt$, converge către $I(x)$ pentru $x \in [\alpha, \beta]$; dacă $f(x, t)$ și $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ sînt continui pentru $x \in [\alpha, \beta]$ și $t \geqslant a$, dacă integrala $\int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$ este uniform convergentă pentru $x \in [\alpha, \beta]$ avem: $I'(x) =$

$$= \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Integrabilitatea: dacă f este continuă pentru $x \in [\alpha, \beta]$ și $t \geqslant a$ și dacă integrala $\int_a^\infty f(x, t)dt$ este uniform convergentă avem:

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^\infty f(x, t)dt = \int_a^\infty dt \int_\alpha^\beta f(x, t)dx$$

În cazurile cele mai simple, convergența uniformă rezultă din a doua inegalitate 1). Dacă se poate găsi o funcție $g(t)$ și un număr T_1 în așa fel ca: $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\forall t > T_1$; $|f(x, t)| < g(t)$, convergența integralei $\int_0^\infty f(t)dt$ are drept consecință convergența uniformă a integralei $\int_a^\infty f(x, t)dt$.

482. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2x}}{1 + t^2} dt$$

483. 1) Fie $I(x)$ funcția definită prin $I(x) = \int_0^\infty \frac{x\,dt}{1 + t^2x^2}$. Să se calculeze $I(x)$. Să se studieze convergența uniformă pe un interval conținînd $x = 0$.

2) Fie $J(x) = \int_0^\infty \frac{x^2dt}{1 + t^2x^2}$. Să se calculeze $J(x)$.

Să se studieze continuitatea și să se justifice rezultatul.

Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea sau integrarea sub semnul integral.

484. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx$, $a^2 < 1$;

485. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - ax^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, $|a| < 1$; **486.** $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$;

487. $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \frac{dx}{\sin x}$, $(a > b > 0)$;

488. Fie F_n: $[0, \infty[\to \mathbf{R}$, aplicația definită de

$$F_n : x \to F_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-tx} \sin t}{t} dt$$

a) Să se arate că F_n admite o derivată continuă F_n'.

b) Să se explicitеze valoarea lui $F_n'(x)$ și să se deducă că $F_n'(x)$ converge uniform pe $[\alpha, \infty[$, (α o constantă > 0), către $-\frac{1}{1 + x^2}$.

c) Să se verifice că : $|F_m(x) - F_n(x)| < \frac{2}{n}$; $m > n$.

Să se deducă convergența uniformă pe $[0, \infty[$ a lui F_n către Φ, apoi continuitatea lui Φ.

d) Să se arate că Φ este derivabilă pe $]0, \infty[$ și admite ca derivată $\Phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. Să se calculeze $\Phi(x)$ pentru $x \in]0, \infty[$

e) Să se deducă folosind cele stabilite mai sus valoarea lui

$$\Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

489. Fie integrala $I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt$

a) Să se studieze convergenta acestei integrale.

b) Să se studieze continuitatea acestei integrale în funcție de x.

c) Să se arate că ea poate fi derivată sub semnul integral pentru orice $x > 0$.

d) Să se calculeze derivata $I'(x)$ și să se deducă expresia lui $I(x)$.

490. a) Se consideră integralele

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(1+t^2)}\, dt, \quad J(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt$$

Să se arate că aceste integrale sînt uniform convergente pentru orice x, aparținînd oricărui interval închis al axei reale.

b) Să se demonstreze că integrala

$$K(x) = \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} \sin xt\ dt$$

este convergentă pentru orice x și că convergenta este uniformă în orice interval $0 < x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

c) Să se arate că $J = \frac{dI}{dx}$, $K = -\frac{d^2I}{dx^2}$. Să se deducă că $I(x)$ verifică o ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Să se integreze această ecuație și să se calculeze $J(x)$, apoi $K(x)$ și $I(x)$.

491. Se consideră integrala $I = \int_0^\infty f(t)dt$ unde $f(t) = \int_1^2 e^{-xt}dx$.

Să se arate că este posibil de a inversa ordinea de integrare. Să se deducă valoarea integralei

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt.$$

492. 1) Să se calculeze integrala $\int_0^x e^{-tu} \sin u\, du$, $(X,\ t \in \mathbf{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se deducă pentru ce valori ale lui t, integrala $\int_0^\infty e^{-tu} \sin u \, du$ este convergentă și să se calculeze valoarea ei.

2) Fie integrala

$$\int_0^\infty e^{-t(x+u)} \sin u \, du,$$

unde x este un număr real pozitiv dat.

a) Să se arate că această integrală este uniform convergentă în raport cu $t \in [a, b]$, $(0 < a < b)$.

b) Să se arate că se poate integra această integrală sub semnul integral și să se deducă ținînd seamă de rezultatul de la 1) că :

$$\int_a^b \frac{e^{-tx} dt}{1 + t^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-a(x+u)} - e^{-b(x+u)}}{x + u} \sin u \, du$$

CAPITOLUL VI

DIFERITE ALTE INTEGRALE

Să se calculeze următoarele integrale :

493. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$; **494.** $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx$;

495. $\int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; **496.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$;

497. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

498. 1) Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_0^1 x^n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) Să se transforme I_{2n+1} prin schimbarea de variabilă $x = \sqrt{1 - \frac{t^2}{n}}$.

Integrala $\sqrt{n} \, I_{2n+1}$ ia forma $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$

Să se demonstreze că dacă $n \to \infty$, J_n tinde către integrala lui Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$

Scanned with OKEN Scanner

3) Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} 2n\, I_{2n}\, I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$. Să se deducă limita lui J_n și valoarea integralei lui Gauss.

499. 1) Să se arate că integrala:

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$$

există $\forall x \in [-1, 1]$ și ea este o funcție continuă de x. (Se va nota $\frac{1+x^2}{2x} = t$ și se va integra prin părți.)

2) Să se demonstreze identitatea:

$$\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + x^2\right)\left(1 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + x^2\right)\cdots\left(1 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + x^2\right) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$$

și să se deducă valoarea integralei I, fie pentru $|x| > 1$, fie pentru $|x| < 1$, fie pentru $|x| = 1$.

3) Să se calculeze $I(x)$, prin metoda următoare: să se demonstreze că:

$$I(x) = \frac{1}{2} I(x^2) = \frac{1}{4} I(x^4) = \ldots$$

Să se deducă că $I(x) = 0$ dacă $0 < x < 1$. Să se calculeze $I(x)$ pentru $x > 1$ și $x < 0$ cu ajutorul identităților $I(-x) = I(x)$: $I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - \pi \ln x^2$. Să se utilizeze continuitatea în origine.

4) Să se deducă din rezultatul precedent valoarea integralei:

$$J(x) = \int_0^{\pi} \frac{x - \cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,d\theta$$

cînd $|x| \neq 1$.

5) Să se calculeze $J(x)$ luînd ca variabilă $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$.

6) Să se calculeze $I(1)$ integrînd sub semnul integral de la 0 la 1 funcția:

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x^2\operatorname{tg}^2 t}$$

500. Se notează prin a și b două numere astfel ca $0 < a < b$ și prin f o funcție definită și continuă în $[0, +\infty[$ se presupune că funcția $t \to \frac{f(t)}{t}$ este integrabilă pe $[1, \infty[$.

1) Să se arate că funcția $x \to \frac{f(kx)}{x}$ este integrabilă în $[u, +\infty[$ dacă u și k sînt numere strict pozitive și că:

$$\int_u^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se arate că funcţia

$$x \to \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$$

este integrabilă pe $]0, \infty[$ şi că

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

3) Să se demonstreze convergenţa integralei

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}\,dt$$

şi să se calculeze această integrală.

501. Fie $f: [a, b] \to E$ integrabilă; pentru $n \in \mathbf{N}$, se consideră $I_n = \int_a^b f(x)e^{inx}dx$, să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Se va considera în primul rînd cazul unei funcţii în scară. Să se studieze limitele integralelor:

$$J_n = \int_a^b f(x)\cos ux\,dx \text{ şi } K_n = \int_a^b f(x)\sin ux\,dx$$

502. Pentru $a \in [0, \pi]$ şi $n \in \mathbf{N}$ se consideră:

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

a) Să se calculeze $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$; să se deducă $I_n(\pi)$ pentru orice n.

b) Pentru $a \in]0, \pi[$, să se compare $I_n(a)$ şi $I_n(\pi - a)$, să se arate, folosind exerciţiul precedent că

$$\lim_{n\to\infty}[I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$$

apoi că

$$\lim_{n\to\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}$$

c) Să se determine.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

şi să se deducă valoarea integralei

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

APLICAŢIILE INTEGRALEI DEFINITE ÎN GEOMETRIE ŞI MECANICĂ

ARIILE FIGURILOR PLANE

1) Dacă $y = f(x)$ este ecuaţia unei curbe continue, aria limitată de curbă, de axa Ox şi de dreptele $x = a$ şi $x = b$, $a < b$ este dată de formula

$$A = \int_a^b |\, f(x)\, |\, dx.$$

2) Dacă $\rho = f(\theta)$ este ecuaţia în coordonate polare a unei curbe, atunci aria sectorului OAB, limitată de arcul AB şi razele polare OA şi OB corespunzătoare unghiurilor α şi β este dată de formula

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta.$$

Lungimea unui arc de curbă

1) Lungimea s a unui arc de curbă de ecuaţie $y = f(x)$ cuprins între punctele de abscisă $x = a$, $x = b$ este dată de formula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

2) Dacă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sînt ecuaţiile parametrice ale curbei, atunci

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

unde t_1 şi t_2 sînt valorile parametrului t care corespund extremităţilor arcului.

Pentru curba $x = x(t)$ $y = y(t)$, $z = z(t)$.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\cdot dt.$$

3) În cazul curbei dată în coordonate polare $\rho = f(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

α şi β fiind valorile unghiului polar θ care corespund extremităţilor arcului.

Volumul unui corp de rotaţie

1) Volumul corpului obţinut prin rotaţia trapezului curbiliniu limitat de arcul de curbă $y = f(x)$, de axa Ox şi de dreptele $x = a$, $x = b$ în jurul axelor Ox respectiv Oy este dat de formulele

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx\,;\; V_y = 2\pi \int_a^b x\, f(x)dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aria unei suprafeţe de rotaţie

1) Aria suprafeţei obţinută prin rotaţia arcului de curbă $y = f(x)$ cuprins între punctele de abscise $x = a$, $x = b$, în jurul axei Ox este dată de

$$S = 2\pi \int_a^b y\,ds$$

unde ds este diferenţiala elementului de arc, care este în cele trei cazuri

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,;\quad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt\,;\quad ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

Teoremele lui Guldin

1) $S = 2\pi y_G \cdot s$ 2) $V = 2\pi y_G \cdot A$

S aria de rotaţie născută prin rotaţia arcului s în jurul lui Ox.
V volumul de rotaţie născut prin rotaţia ariei A în jurul lui Ox.
y_G este ordonata centrului de greutate al arcului s respectiv al ariei A.

Ariile figurilor plane

503. Să se calculeze aria limitată de curbele

$$y = \frac{8a^3}{x^3 + 4a^3} \text{ şi } x^2 = 4ay.$$

504. Să se calculeze aria limitată de un arc al curbei

$$y = a\left(1 - \cos\frac{x}{a}\right) \text{ şi axa } Ox.$$

505. Să se calculeze aria buclei strofoidei drepte

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

506. Să se calculeze aria limitată de astroida

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

507. Să se calculeze aria limitată de curba

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$

508. Să se calculeze aria limitată de lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$$

509. Să se calculeze aria limitată de un arc al cicloidei

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

şi axa Ox.

510. Să se calculeze aria limitată de curba

$$x^4 - y^4 = x^2 - 3y^2$$

Scanned with OKEN Scanner

511. Să se calculeze aria limitată de cardioida

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

Să se calculeze ariile buclelor curbelor:

512. $r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}$ $\qquad \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

513. $r = a\sqrt{\dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}}$ $\qquad \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

514. $r = \dfrac{a}{\cos^3\dfrac{\theta}{3}}$ $\qquad \theta \in [0, \pi]$

Lungimea unui arc de curbă

Să se calculeze lungimile arcelor curbelor:

515. $y = \ln x - \dfrac{x^2}{8}$ $\quad x \in [1, e]$

516. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 < b \leqslant y \leqslant a$.

517. Să se calculeze lungimea astroidei

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Să se calculeze lungimea arcului curbei

518. $8a^3y = x^4 + 6a^2x^2$ de la $x = 0$ la $x = x$.

519. Să se calculeze lungimea unui arc al cicloidei

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

520. Să se calculeze lungimea arcului curbei

$$x = \cos^3 t + \frac{1}{2}\sin t$$

$$y = \sin^3 t + \frac{1}{2}\cos t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

521. Să se calculeze lungimea buclei curbei

$$x = \frac{3t}{(1-t)^3} \qquad y = \frac{3t-1}{(1-t)^3}$$

$$t \in]-\infty,\ 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3},\ +\infty[.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze lungimile curbelor

522. $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}, \quad \theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

523. $r = a \sin^4 \frac{\theta}{4}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

524. $r = \frac{a}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}, \quad \theta \in [0, \pi]$.

Să se calculeze lungimile arcelor curbelor

525. $y = \frac{x^3}{3} \qquad z = \frac{1}{2x} \qquad x \in [x_0, x]$

526. $x = ae^{-t}\cos t\,; \; y = ae^{-t}\sin t\,; \; z = be^{-t}, \; t \in [0, \infty]$

527. $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}\,; \; y = a \sin t \sqrt{\cos 2t}\,; \; z = at$

528. $x = t \cos (a \ln t)\,; \; y = t \sin (a \ln t)\,; \; z = bt$

529. $y^2 = 2ax - x^2\,; \; z = -a \ln\left(1 - \frac{x}{2a}\right); \; x \in [0, x_0]$

530. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,; \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right) = a$, de la $A(a, 0, 0)$ la $M(x, y, z)$.

Volumele corpurilor de rotaţie

Să se calculeze volumele corpurilor născute prin rotirea ariilor limitate de următoarele curbe în jurul axei Ox.

531. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ şi în jurul lui Oy.

532. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

533. $x^2y^2 = (x - 1)(3 - x)$

534. Să se calculeze volumul unui segment sferic cu o bază de rază r şi înălţime h.

Aria unei suprafeţe de rotaţie

535. Să se calculeze aria sferei de rază a.

536. Să se calculeze aria suprafeţei născută prin rotaţia cercului $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $b > a$ în jurul axei Ox.

Să se calculeze ariile suprafeţelor născute prin rotaţia următoarelor curbe în jurul lui Ox.

Scanned with OKEN Scanner

537. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

538. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

539. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$.

540. $r = a(1 - \cos \theta)$.

Centre de greutate și momente de inerție

Să se calculeze centrele de greutate ale arcelor omogene de curbă.

541. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $t \in [0, 2\pi]$

542. $x = \frac{a}{2}(3 \cos t - \cos 3t)$; $y = \frac{a}{2}(3 \sin t - \sin 3t)$; $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

543. $r = a(1 + \cos \theta)$; $\theta \in [0, \pi)]$

544. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $z = 4a \cos \frac{t}{2}$; $t \in \left[0, 2\pi\right]$

545. $x = e^t \cos t$; $y = e^t \sin t$; $z = e^t$; $t \in]-\infty, 0]$

546. Să se determine centrul de greutate al unei plăci omogene mărginită de elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \; x \geqslant 0; \; y \geqslant 0.$$

547. Să se determine centrul de greutate al unei plăci omogene, care are forma unui segment de elipsă, determinat de coarda care unește vîrfurile curbei situate pe direcția pozitivă a axelor de coordonate.

548. Să se determine centrul de greutate al unei plăci omogene mărginită de cisoida $y^2(2a - x) = x^3$ și asimptota sa.

549. Să se determine centrul de greutate al unei plăci omogene mărginită de parabola $y^2 = ax$ și cercul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ și situată deasupra axei parabolei. Folosind teoremele lui Guldin, să se calculeze :

550. Volumul și suprafața torului generat prin rotirea cercului

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2; \; b > a \text{ în jurul axei } Oy.$$

551. Volumul generat prin rotirea elipsei în jurul dreptei $x = 2a$.

552. Centrul de greutate al unei plăci omogene mărginită de cardioida $r = a(1 + \cos \theta)$.

553. Centrul de greutate al unei plăci omogene de forma unei bucle a curbei $r = a \cos 2\theta$.

554. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Ox al unui arc de cicloidă $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ cuprins între două puncte de întoarcere succesive.

555. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axele de coordonate al spiralei elicei $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $z = \frac{h}{2\pi} t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

SERII DE FUNCŢII DE O VARIABILĂ REALĂ

Notăm prin $\{a_n x^n\}$ o serie întreagă de termen general $a_n x^n$. Dacă seria este convergentă suma este reprezentată prin $\sum_0^\infty a_n x^n$.

INTERVAL DE CONVERGENŢĂ

Se stabileşte existenţa unui număr R, eventual nul sau infinit astfel ca seria $\{a_n x^n\}$ să fie absolut convergentă pentru $|x| < R$ şi divergentă pentru $|x| > R$, aceasta este raza de convergenţă. Comportarea seriei în $x = \pm R$ se studiază direct.

Regulile lui d'Alembert şi Cauchy aplicate seriei $\{a_n x^n\}$ arată că

a) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$;

b) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Aceste reguli nu rezolvă problema generală R există chiar dacă $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ sau $\sqrt[n]{|a_n|}$ nu are limită.

Să se determine razele de convergenţă ale următoarelor serii întregi:

556. $\left\{\frac{x^n\sqrt{n}}{n+1}\right\}$; **557.** $\left\{\frac{x^{3n}}{(2n)!}\right\}$; **558.** $\left\{\frac{2^n x^n}{n^3+1}\right\}$; **559.** $\left\{\frac{n!}{n^n}x^n\right\}$;

560. $\left\{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}x^n\right\}$, $a>0$; **561.** $\left\{\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n+2)}x^n\right\}$;

562. $\left\{\frac{nx^n}{2^{n-1}\cdot3^n}\right\}$; **563.** $\left\{\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}x^n\right\}$; **564.** $\left\{\frac{n!}{3^n}x^n\right\}$; **565.** $\{n^{\ln n}x^n\}$; **566.** $\{n^{(-1)^n}x^n\}$;

567. $\left\{\left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{n}}x^n\right\}$; **568.** $\left\{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^3+2}{n+2}}x^n\right\}$; **569.** $\left\{\frac{n!}{(n+1)^n}x^n\right\}$;

570. $\left\{\frac{x^n}{a^n+b^n}\right\}$, $(a\geqslant b>0)$; **571.** $\left\{\frac{n^p-1}{n^q+2}x^n\right\}$; **572.** $\{a^{n^2}x^n\}$, $a>0$.

573. Să se determine raza de convergenţă a seriei $\{a_n x^n\}$ astfel ca $a_0 = 1$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = l_1$ dacă n este par şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = l_2$ dacă n este impar.

574. Să se determine raza de convergenţă a seriei $\{a_n x^n\}$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n$ pentru $n = 3p-1$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ pentru $n = 3p$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{n}$ pentru $n = 3p+1$.

Scanned with OKEN Scanner

Folosirea unei serii majorante :

Regulile lui Cauchy și d'Alembert, adesea utile, ne dau raza de convergență în cazuri particulare. În unele cazuri se poate studia convergența utilizînd o serie majorantă. Dacă pentru orice $n > N$ avem $|a_n| \leqslant A_n$ se poate afirma că convergența seriei $\{A_n x^n\}$ într-un interval $]-R_1, R_1[$ antrenează pe cel al seriei $\{a_n x^n\}$. Vom avea pentru ultima serie $R \geqslant R_1$. Dacă se poate arăta că, pentru $|x| > R_1$ seria studiată este convergentă, avem $R = R_1$.

575. Fie $\{a_n\}$ o serie convergentă. Să se arate că raza de convergență a seriei $\left\{\frac{a_n x^n}{n!}\right\}$ este infinită.

Să se determine razele de convergență ale seriilor.

576. $\left\{\frac{x^n \cos n\theta}{n!}\right\}$; **577.** $\{x^n \cdot \sin n\}$.

Derivarea unei serii întregi. Se știe că în intervalul de convergență suma $S(x)$ a unei serii întregi este o funcție de o infinitate de ori derivabilă. Derivata $S'(x)$ se obține derivînd seria termen cu termen, raza de convergență rămîne aceeași.

578. Care este raza de convergență a seriei $\left\{\frac{a^n x^n}{n!}\right\}$? Fie $S(x)$ suma sa. Să se compare $S(x)$ cu $S'(x)$ și să se deducă $S(x)$; caz particular : $a = 1$.

579. Fie seria $\{a_n x^n\}$ cu $a_n = x\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\alpha \in \mathbf{R}$. Care este raza de convergență? Dacă $S_\alpha(x)$ este suma seriei să se verifice că $S'_\alpha(x) = \alpha S_{\alpha-1}(x)$ și că $(1+x)S'_\alpha(x) = \alpha S_\alpha(x)$. Să se deducă $S_\alpha(x)$.

580. Fie $S(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{2p}}{(2p)!}$. Să se compare $S''(x)$ cu $S(x)$; aceeași chestiune pentru $T(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$. Să se deducă suma seriei $\sum_0^\infty \frac{x^{4p}}{(4p)!}$.

Integrarea unei serii întregi

Fie $S(x)$ suma unei serii întregi $\{a_n x^n\}$ pentru $|x| < R$. O primitivă oarecare a lui $S(x)$ se obține integrînd seria termen cu termen

$$\int S(x)dx = C + \sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_1^\infty \frac{a_{n-1}x^n}{n}.$$

Dacă intervalul de integrare este $[0, x]$ cu $|x| < R$ se obține

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{01} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

În general este imposibil de a face $x = \pm R$ în această formulă.

Proprietatea precedentă permite dezvoltarea în serie a unui număr de funcții simple.

Scanned with OKEN Scanner

581. Fie $f(x) = \int_{-2}^{x} \frac{dt}{t^3 - 1}$. Pentru ce valori ale lui x este definită $f(x)$?

Să se dezvolte $f(x)$ în serie de puteri ale lui x.

Care este raza de convergenţă ?

582. Să se dezvolte în serie întreagă funcţia Y definită prin

$$Y(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^t - 1}{t} dt$$

Care este raza de convergenţă !

Punînd $I = \int_{1}^{2} e^x \ln x \, dx$ să se stabilească o relaţie între I şi oarecare valori ale lui Y. Să se deducă valoarea apropiată a lui I cu aproximaţie de 10^{-4}.

583. Folosind dezvoltarea lui e^x să se arate că $p ! < \left(\frac{p}{e}\right)^p$ (p natural).

584. Făcînd $x = 1$ în dezvoltarea lui e^{-x} să se deducă că e nu poate fi număr raţional.

585. Să se exprime $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^p}}$ cu ajutorul unei serii întregi şi să se arate că pentru $p > 2$ ea este aproape de $\frac{1}{2}$.

586. Să se determine rădăcina de ordin m (m întreg) a unui număr N. Dacă N nu este destul de mare putem determina un număr întreg a astfel ca $a^m \leqslant N < (a + 1)^m$. Se pune $N = a^m + b$. Se deduce o serie a cărei sumă este $\sqrt[m]{N}$.

587. Să se calculeze valoarea apropiată a lui $\sqrt[3]{31}$.

588. Să se calculeze $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$ cu aproximaţie de 10^{-4}.

OPERAŢII CU SERII. SPAŢIUL VECTORIAL AL SERIILOR ÎNTREGI

Adunarea seriilor întregi şi înmulţirea cu un scalar dau mulţimii structura de spaţiu vectorial. Relaţiile lineare între serii se extind şi asupra funcţiilor sumă în interiorul oricărui domeniul comun de convergenţă.

Produsul a două serii întregi

Produsul asociază seriilor $\{u_n x^n\}$ şi $\{v_n x^n\}$ seria $\{W_n x^n\}$ astfel că

$$W_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p v_{n-p}$$

După regula de înmulţire (în sensul lui Cauchy) a două serii absolut convergente, suma seriei $\{W_n x^n\}$ este egală cu produsul sumelor seriilor $\{u_n x^n\}$ şi $\{v_n x^n\}$ în intervalul comun de convergenţă a celor două serii.

589. Să se dezvolte în serie întreagă $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$ și să se determine raza de convergență.

Să se dezvolte în serie întreagă:

590. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; **591.** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$;

592. Să se efectueze produsul seriilor întregi

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ și } g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

și să se deducă egalitatea

$$2^n = 1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \ldots + C_{2n+1}^{2n}$$

593. Să se arate că dezvoltarea lui $e^{-(x+h)^2}$ în serie întreagă după puterile lui x se poate obține cu ajutorul produsului a două serii întregi. Se găsește

$$e^{-(x+h)^2} = e^{-h^2}\left[1 + \sum_1^\infty \frac{x^n}{n!} P_n(h)\right]$$

unde P_n înseamnă un polinom de gradul n, ai căror coeficienți se vor calcula.

Să se dezvolte în serie întreagă funcțiile:

594. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, $x \neq 0$ și $f(0) = 1$; **595.** $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$;

596. $f(x) = \ln(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$; **597.** $f(x) = \sin^3 x$ **598.** $f(x) = \cos^3 x$;

599. $f(x) = \sin 2x \cos 4x$; **600.** $f(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x}$ cu $f(0) = 4$; **601.** $f(x) = \operatorname{tg} x$;

602. $f(x) = x \operatorname{ctg} x$ cu $f(0) = 1$ **603.** $f(x) = (1+x)^\lambda$; **604.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

605. $f(x) = \arcsin x$ **606.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; **607.** $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$;

608. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$; **609.** $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; **610.** $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

611. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$; **612.** $f(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du$

613. $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$; **614.** $f(x) = \int_0^x \cos(u^2)du$; **615.** $f(x) = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$;

616. $f(x) = \frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$; **617.** $f(x) = \frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$; **618.** $f(x) = \frac{1 - x\operatorname{ch} a}{1 - 2x\operatorname{ch} a + x^2}$;

619. $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; **620.** $f(x) = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

621. Să se dezvolte în serie întreagă

$$y = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a),\ t = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} a)$$

622. Să se dezvolte în serie întreagă

$$y = e^{x \cos\theta} \cos(x \sin\theta),\ z = e^{x \cos\theta} \sin(x \sin\theta)$$

623. $y = \operatorname{ch} x \cos x$

Să se calculeze sumele următoarelor serii :

624. $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, $|x| < 1$; **625.** $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $|x| < 1$;

626. $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(m+n)}$, $m \in \mathbf{N}$, $|x| < 1$; **627.** $\sum_{1}^{\infty} (n+1)^2 x^m$, $|x| < 1$;

628. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$, $|x| < 1$; **629.** $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}$;

630. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{1+3(n-1)}$; **631.** $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3+4(n-1)}$

632. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$; **633.** $S(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1+2n+2n^2}{1+3n+2n^2} x^n$

634. $S(x) = \sum_{2}^{\infty} \frac{x^2}{n^2+n-2}$; **635.** $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$;

636. $S(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)} x^{n-1}$.

Folosind dezvoltarea în serie de puteri să se calculeze cu trei zecimale exacte

637. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$; **638.** $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; **639.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ **640.** $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$;

641. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

642. Să se arate că lungimea elipsei de semiaxe a și b este dată cu o aproximație foarte bună de

$$L \simeq \pi\left[3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Restul unei serii întregi

Fie seria $\{a_p x^p\}$ de sumă $S(x) = \sum_0^\infty a_p x^p$ pentru $|x| < R$.

Totdeauna se poate pune

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{cu}$$

$$S_n(x) = \sum_0^n a_p x^p \text{ și } R_n(x) = \sum_{n+1}^\infty a_p x^p ;$$

$S_n(x)$ este suma parțială de ordin n iar $R_n(x)$ restul de ordin n al seriei. $R_n(x)$ este termenul complementar din formula lui Mac-Laurin aplicată la $S(x)$. Se poate deduce un majorant al restului unei serii verificînd condițiile următoare, pornind de la un ordin oarecare N, avem $|a_n| < A$, unde A este dat. Se vede, că, dacă $n > N$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^\infty a_p x^p\right| \leqslant \sum_{n+1}^\infty |a_p| \cdot |x|^p \leqslant A \sum_{n+1}^\infty |x|^p, \quad \text{de unde}$$

$$|R_n(x)| < A \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

643. Fie seria întreagă $\{(n+1)x^n\}$. Să se determine o expresie algebrică simplă a sumei parțiale de ordin n. Să se deducă restul de ordin n.

644. Se consideră seria întreagă $\{a_n x^n\}$ și presupunem că $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$. Care este raza de convergență ? Să se determine un majorant și un minorant al lui $R_n(x)$ valabil pentru n destul de mare și $0 < x < 1$.

645. Fie o serie întreagă $\{a_n x^n\}$ai cărei coeficienți $a_n > 0$ și convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că suma $S(x)$ a acestei serii este echivalentă cînd $n \to +\infty$ cu restul $R_n(x) = \sum_{n+1}^\infty a_p x^p$, oricare ar fi n fix.

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII REALE. CONVERGENȚA UNIFORMĂ

Șiruri de funcții. Convergență simplă

1) Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții definite pe o mulțime A, submulțime a lui $\mathbf{R}$. Șirul se spune *simplu convergent* pe A dacă $\forall x \in A$ șirul numeric $\{f_n(x)\}$ este convergent cînd $n \to \infty$, fie $f(x)$ limita sa. Condiția de convergență se scrie

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists N, \forall n, n > N \text{ atrenează}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ unde } N \text{ depinde de } \varepsilon \text{ și } x.$$

2) **Convergența este uniformă** dacă la orice $\varepsilon > 0$ putem face să corespundă un N care nu depinde decît de ε și de nu x astfel ca

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in N, \forall x \in A, n > N \text{ atrenează}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Scanned with OKEN Scanner

În practică se stabilește convergența simplă care ne permite să determinăm pe $f(x)$. Pentru a stabili convergența uniformă se caută un M_n astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < M_n \text{ oricare ar fi } x \in A$$

rămînînd a arăta că $M_n \to 0$ cînd $n \to \infty$. Invers pentru a stabili că un șir nu este uniform convergent trebuie arătat că

$$|f_n(x) - f(x)| \text{ nu tinde către zero cînd } n \to \infty$$

646. Fie $f_n(x) = x^n$ cu $x \in [0, 1]$ un șir de funcții. Să se studieze convergența simplă, continuitatea lui f_n și a limitei f.

647. Se definește pe intervalul $[0, 1]$ un șir de funcții

$$f_n(x) = (n-1)x \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad f_n(x) = 1 - x \text{ dacă } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right].$$

Să se studieze convergența simplă, continuitatea lui f_n și a lui f.

648. Se consideră șirul $\{f_n\}$ definit pe $[0, 1]$ prin condițiile următoare:

$$f_n(x) = n^2x \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}$$

$$f_n(x) = n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) \text{ dacă } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{dacă } x \geqslant \frac{1}{n}.$$

Să se arate că există convergență simplă către o funcție f. Să se compare $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ și $\int_0^1 f(x)\,dx$.

649. Fie șirul $\{f_n\}$ definit pe $\mathbf{R}$ prin $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Să se determine funcția limită f. Funcțiile f_n și f fiind derivabile, să se studieze, dacă, pentru n oarecare, avem $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

650. Să se arate că șirul $f_n(x) = x^n$ pentru $x \in [0, 1]$) este uniform convergent pe orice interval $[0, a]$ cu $0 < a < 1$, dar nu este pe $[0, 1]$.

651. Să se arate că șirul definit la exercițiul 647 nu este uniform convergent pe $[0, 1]$.

653. Să se arate că șirul definit la exercițiul 648 nu este uniform convergent.

653. Să se arate că șirul definit la exercițiul 649 este uniform convergent pe $\mathbf{R}$ dar că șirul f_n' nu este.

654. Fie șirul $\{f_n\}$ uniform convergent pe mulțimea A. Să se arate că șirul $\{g_n\}$ de funcții $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{1 + f_n^2(x)}$ este de asemenea uniform convergent.

655. Fie $a > 0$. Să se arate că șirul de funcții

$$f_n(x) = \frac{\int_n^a e^{n(x-t)}\,dt}{\int_0^a e^{-nt}\,dt}$$

converge către 1 pe intervalul $[0, a]$ și că convergența este uniformă pe orice interval $[0, a']$ unde $0 < a' < a$.

Scanned with OKEN Scanner

656. Fie $f_n(x) = n\,x^n(1-x)$ un şir de funcţii definite pe $[0, 1]$. Să se studieze convergenţa simplă şi convergenţa uniformă.

Să se compare $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ şi $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

657. Să se studieze convergenţa simplă pentru $x \geqslant 0$ a şirului $\{f_n\}$ astfel ca

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$$

Să se arate că pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ convergenţa este uniformă. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^2+1)f_n(x)dx.$$

658. Fie $\{f_n\}$ şirul definit pe $\mathbf{R}$ prin $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{n^2x^2+1}$.

a) Pentru $a \leqslant b$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)dt$. Să se discute după valorile lui a şi b.

b) Să se arate că pentru orice număr $c > 0$ şirul $\{f_n\}$ converge uniform pe $[c, +\infty[$ şi pe $]-\infty, -c]$.

SERII DE FUNCŢII. CONVERGENŢA UNIFORMĂ

Fie $\{u_n\}$ un şir de funcţii reale definite pe o aceeaşi mulţime. Asociem acestui şir, un şir $\{S_n\}$ numit şirul sumelor parţiale definit pentru $x \in A$ prin

$$S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$$

Mulţimea celor două şiruri $\{u_n\}$ şi $\{S_n\}$ constituie o serie de funcţii. Dacă $\{S_n\}$ e simplu convergentă pe A seria e simplu convergentă pe A. Funcţia limită $S(x)$ este suma seriei de funcţii. Se scrie

$$S(x) = \sum_0^\infty u_n(x)$$

Dacă $\{S_n\}$ este uniform convergent atunci seria va fi uniform convergentă.

UN CRITERIU DE CONVERGENŢĂ UNIFORMĂ

Dacă $|u_n| < a_n$, a_n termenul general al unei serii numerice convergentă atunci seria de funcţii este uniform convergentă.

659. Fie seria de termen general $u_n(x) = x(1-x)^n$. Să se indice domeniul de convergenţă A, şi suma pentru $x \in A$. Concluzia pentru $x = 0$.

660. Fie seria de termen general $u_n(x) = \operatorname{th} nx - \operatorname{th}(n-1)x$ (cu $n \geqslant 1$). Să se studieze convergenţa simplă pe $\mathbf{R}$ şi să se determine funcţia sumă.

661. Fie seria de termen general $u_n(x) = x^n(1-x^n)$. Să se studieze convergenţa simplă pe $\mathbf{R}$ care este domeniul de convergenţă A ?

Scanned with OKEN Scanner

662. Să se arate că seriile următoare sînt uniform convergente pe $\mathbf{R}$.

a) $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$; b) $u_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$; c) $u_n(x) = \dfrac{\sin n^4 x}{n^2}$.

663. Fie seria $u_n(x) = x(1 - x)^n$. Să se arate că ea nu este uniform convergentă pe $[0, 2]$ dar că ea este pe intervalul $[a, b]$, $0 < a < b < 2$.

664. Se pune $I = \int_1^\infty \sqrt{x}(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)\,dx$. Să se determine o serie numerică cu suma I.

665. Se consideră $f(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > 0$. Să se dezvolte în serie de puteri $x^\alpha \cdot e^{-x}$. Să se arate că această serie este uniform convergentă pe segmentul $[0, 1]$. Să se deducă o dezvoltare a lui $f(x)$ în serie de funcții de α. Această ultimă serie este uniform convergentă pe intervalul $[0, \infty[$?

666. Fie seria $u_n(x) = e^{-n^2 x}$. Să se studieze convergența. Să se arate că în domeniul de convergență suma $S(x)$ este continuă și indefinit derivabilă.

667. Să se studieze convergența uniformă a seriilor

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}, \quad v_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$$

Ce relație există între sumele lor ?

668. Fie seria cu termenul general $(-1)^n u_n(x)$. Se presupune că pe mulțimea $A \subset \mathbf{R}$ condițiile următoare sînt realizate pentru orice x și orice n.

$$u_n(x) > 0, \quad u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x), \quad u_n(x) \leqslant a_n$$

unde a_n tinde către zero. Să se arate că seria este uniform convergentă pe A.

669. Să se arate că seria $u_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}$ este uniform convergentă pe orice interval $[0, a]$, unde a este arbitrar dar nu este pe mulțimea realelor pozitive. (Pentru aceasta, se arată că, dacă $x = 2p$ cu p întreg, avem $\sum_{p+1}^{2p} u_k(x) > \dfrac{p}{4}$.) Dacă $S(x)$ este suma, să se compare $\lim_{n\to\infty} S(x)$ și $\sum_0^\infty \lim_{n\to\infty} U_n(x)$.

670. Fie seria $u_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2 x^2}$ cu $n \geqslant 1$. a) Să se studieze convergența simplă și convergența uniformă. Fie $S(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$.

b) Studiind seria cu termenul general $\dfrac{x^2}{1 + n^2 x^2}$ să se arate că, pentru x infinit, $S(x)$ este echivalentă cu $\dfrac{A}{x^2}$, unde A este o constantă care se va preciza. c) Să se studieze $\lim_{x\to\infty} S(x)$. Utilizînd inegalitatea

$$x u_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x}{1 + x^2 t^2}\,dt \leqslant x u_n(x), \quad (x > 0)$$

să se arate că $\lim_{x\to 0} x\,S(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (cu $x > 0$).

CAPITOLUL IX

INTEGRALA CURBILINIE

Definiţiile care urmează se referă la spaţiile $\mathbf{R}^2$ şi $\mathbf{R}^3$ înzestrate cu structura euclidiană. ($\mathbf{R}^2$ este identificat cu planul şi $\mathbf{R}^3$ cu spaţiul geometriei euclidiene.) Toate reperele utilizate sînt presupuse ortonormale.

INTEGRALE CURBILINII DE PRIMA SPEŢĂ

Fie o curbă C netedă de ecuaţie $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ şi $f(x, y)$ o funcţie continuă într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$. Se consideră un sistem de puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ care împart curba C în arce elementare $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i} = \Delta s_i$ şi se formează suma integrală

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i, \quad M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$$

Prin definiţie

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \int_C f(x, y)ds$$

este integrala curbilinie de prima speţă, şi care se calculează cu formula

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \cdot \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx.$$

Dacă curba C are ecuaţiile parametrice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

atunci

$$\int_C f(x, y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

În mod analog se defineşte integrala curbilinie a unei funcţii $f(x, y, z)$ pe o curbă strîmbă în spaţiul $\mathbf{R}^3$.

INTEGRALE CURBILINII DE A DOUA SPEŢĂ

Fie $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ două funcţii continue într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$ şi $y = \varphi(x)$ o curbă netedă $C \subset D$; $x \in [a, b]$. Integrala $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ se numeşte *integrală curbilinie de a doua speţă* şi care se calculează după cum urmează:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)\{\varphi'(x)\}dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă curba C are ecuațiile parametrice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ atunci

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

Analog se definește integrala curbilinie

$$\int_C X(x, y, z)dx + Y(x, y, t)dy + Z(x, y, z)dz$$

$C \subset D \subset \mathbf{R}^3$, X, Y, Z continui în D.

INTEGRALE CURBILINII A UNEI DIFERENȚIALE TOTALE

Cînd expresia $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$ atunci

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y_1)dx + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Q(x, y)dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1)$$

adică integrala este independentă de drum. În particular dacă curba C este închisă integrala este nulă.

INTEGRALE CURBILINII

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii.

671. $\int_c ye^{-x}ds$, Curba C are ecuațiile parametrice

$$x = \ln(1 + t^2),\ y = 2\operatorname{arctg} t - t,\quad t \in [0, 1]$$

672. $\int_c xy\ ds$, C fiind arcul din primul cadran al elipsei.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

673. $\int_c xyz\ ds$, Curba C are ecuațiile

$$x = t$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3},\ t \in [0, 1]$$

$$z = \frac{1}{2}t^2$$

674. $\int_c (x^2 + y^2)ds$, C fiind segmentul de dreaptă

$$AB,\ A(a, a),\ B(b, b) \qquad b > a.$$

675. $\int_{c^+} x\,dy - y\,dx$, C

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x\sqrt{3} \qquad x \geqslant 0 \\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

676. $\int_{c+} (x+y)dx - y\,dy$, $C\begin{cases} xy = 2 \\ y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$ $x \geqslant 0$

677. $\int_{c^-} (2a-y)dx + x\,dy$, $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0,\ 2\pi]$

678. $\int \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}\,dy$, C fiind semicercul

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \qquad y \geqslant 0$$

679. $\int_c \frac{dy}{x+3}$, C fiind arcul elipsei $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

între punctele $A(3,\ 0)$ $B(0,\ 2)$.

680. Folosind integrala curbilinie să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

681. $\int_c \frac{x+y}{x-y}(x\,dx - y\,dy)$,

C fiind conturul

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = 0$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{4},\ x \geqslant 0.$$

682. Fie A un compact definit de $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\rho \leqslant a\sqrt{\cos 2\theta}$. C fiind frontiera lui A să se calculeze $\int_C (e^x \cos y + xy^2)dx - (e^x \sin y + x^2 y)dy$ (se va desface forma diferențială în două forme dintre care una este diferențială totală).

683. $\int_C x^2 dy + y^2\,dx$ Curba C fiind:

$$\alpha.\ x^2 + y^2 - ax = 0, \qquad a > 0$$

$$\beta.\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\gamma.\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$$

684. $\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ C fiind arcul

$$x^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3} \text{ cuprins în primul cadran.}$$

Scanned with OKEN Scanner

685. Fie $A(2, 0)$, $B(1, -1)$, $C(1, 0)$, $D(-1, 0)$
Să se calculeze

$$\int_{\Gamma} (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y \operatorname{arctg} y)\,dy$$

Γ fiind reuniunea segmentelor BD, DA și arcul de cerc AD cu centrul în C.

686. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori

$\bar{F} = (x + 2y + 3z)\,\bar{i} + (2x + 3y + z)\,\bar{j} + (3x + y + 2z)\,\bar{k}$ pe segmentul M_0M_1. $M_0(0, 1, 2)$; $M_1(-1, 01)$.

687. Să se calculeze circulația cîmpului

$$\bar{F} = \frac{3x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\bar{i} - \frac{3y^3 + x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\bar{j}$$

pe arcul curbei $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

688. Să se calculeze circulația cîmpului

$$\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j},\ P = 3a(x^2 + y^2) - y^3 \text{ și } Q = 3xy(2a - y)$$

de-a lungul unui semicerc de diametru AB care nu conține originea O $(0, 0)$; A $(-a, a)$; $B(a, a)$ și apoi pe conturul închis format din semicercul AB și segmentul orientat BA.

689. Se consideră integrala curbilinie

$$I = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$$

unde $P = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \sin y - y \cos y)$ și

$$Q = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \cos y + y \sin y)$$

unde Γ este o curbă simplă închisă cuprinzînd originea.

1) Să se verifice că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ și să se arate că $A = P + y$ și $B = Q - x$ sînt continue chiar în origine. Să se deducă că $I = 2\pi$

2) Să se regăsească acest rezultat transformînd integrala în coordonate polare și integrînd pe un cerc de centru O în care facem ca raza să tindă către zero.

690. Să se calculeze $\int_{\Gamma} y\,dx + 2x\,dy$ pe conturul Γ limitînd domeniul D loc al punctelor unde cel puțin una din inegalitățile următoare este verificată.

$$x^2 + y^2 - 2x < 0, \quad x^2 + y^2 - 2y < 0$$

691. Fie curba $r = \frac{a}{1 + \sin\theta}$ și AB arcul acestei curbe obținut cînd $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Punctul A fiind pe Ox. Pentru ce valori $\alpha > 0 \int_{AB} \frac{y\,dx}{x^\alpha}$ este convergentă. Să se calculeze.

Scanned with OKEN Scanner

692. Fie $A(0, 1)$, $B(1, 1)$, $C(0, 2)$. Γ conturul format de AB, CA și arcul de cerc cu centrul în A și raza AB. Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} \frac{2xy\,dx + (1 - x^2)\,dy}{y^2}$.

Se putea prevedea rezultatul ?

693. $I = \int_C (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, C fiind curba de intersecție a suprafețelor

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4ax$$
$$x^2 + y^2 = ax \qquad z \geqslant 0$$

694. Fie $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ unde

$$P = \frac{3x^2 - y^2(x^2 + y^2)}{x^2 y}, \quad Q = \frac{3y^2 - x^2(x^2 + y^2)}{xy^2}$$

1) Să se arate că în domeniul D definit prin $x > 0$, $y > 0$ cele două funcții sînt continui diferențiabile și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Să se determine în D o funcție U a cărei diferențială $dU = \omega$.

3) Să se calculeze valoarea integralei curbilinii $\int_{\Gamma} \omega$, arcul curbei Γ fiind definit prin

$$x = t + \cos^2 t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y = 1 + \sin^2 t$$

695. Fie $Z = Z(x, y)$. Se consideră expresia diferențială

$$\omega = \frac{y(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2}\,dy$$

1) Ce relație trebuie să satisfacă z pentru ca $\int_c \omega = 0$, C fiind o curbă închisă.

2) Presupunînd z definit de $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ să se calculeze $\int_{C+} \omega$ pe

$$(x - 1)(x - 2) + y^2 = 0$$

696. $\int_{\Gamma+} \frac{(y + z)\,dx + (x + y)\,dy + dz}{x^2 + y^2}$ unde

1) Γ^+ segmentul orientat AB. $A(1, 1, 1)$. $B(2, 2, 2)$

2) Γ^+ este arcul elicei

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$z = kt$$

697. $\int_C y^2\,dx + z^2 dy + x^2 dz$. C fiind curba lui Viviani, adică intersecția suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și $x^2 + y^2 - ax = 0$.

698. $\int_C \frac{2xy\,dx + (1 - x^2)dy}{(1 - x^2)^2 + y^2}$ C fiind o curbă închisă care conține punctul $(1, 0)$, dar nu conține punctul $(-1, 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

699. Fie a, b, c constante date. Să se determine n astfel ca expresia

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{(x^2 + y^2)^n}(x\,dy - y\,dx)$$

să fie o diferențială totală exactă. Numărul n fiind determinat, să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_C \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{(x^2 + y^2)^n}(x\,dy - y\,dx)$$

luată de-a lungul unui drum astfel că AMB unește două puncte A și B ale axei Ox de abscise x_0 și x_1.

700. Să se determine o funcție $f(x, y)$ care se reduce la $\frac{1}{1+y^2}$ pentru $x = 0$, astfel ca integrala curbilinie $I = \int_C f(x, y)\,[2xy\,dx + (1 - x^2)\,dy]$ de-a lungul unui contur închis oarecare neconținînd nici un punct singular al funcției $f(x, y)$ să fie nulă. Să se calculeze valoarea aceleiași integrale luată pe circumferința cu centrul în $(1, 0)$ și raza $r < 2$.

Să se determine funcțiile, ale căror diferențiale totale sînt:

701. $du = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$

702. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$

703. $du = \frac{a\,dx}{z} - \frac{b\,dy}{z} + \frac{by - ax}{z^2}\,dz$

704. $du = \frac{y^2e^z\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xye^z\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{xe^z\,dz}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

705. $du = z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{z\,dy}{xy^2} + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz$

706. Să se arate că forma

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}[(x \sin x - y \cos x)\,dx + (x \cos x + y \sin y)\,dy]$$

este diferențială totală. Notînd $I(R)$ integrala lui ω pe semicercul $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$ în sens direct, să se determine

$$\lim_{R\to 0} I(R) \quad \text{și} \quad \lim_{R\to\infty} I(R)$$

Se notează cu Γ drumul orientat în sens direct format de două semicercuri analoage precedentului de raze R_1 și R_2 $(0 < R_1 < R_2)$ și de segmentele $[-R_2, R_1]$ și $[R_1, R_2]$ ale axei Ox. Să se calculeze integrala lui ω pe Γ și limita sa cînd $R_1 \to 0$ și $R_2 \to \infty$. Să se deducă $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

INTEGRALA DUBLĂ

Fie $f(x, y)$ o funcţie numerică mărginită pe D cu valori în R. D fiind un compact simplu definit prin

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\,;\ \varphi_1 \text{ şi } \varphi_2$$

funcţii numerice continui pe $[a, b]$ cu $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$.

Prin definiţie se numeşte integrala dublă fig. 1, fig. 2

$$\lim_{\substack{|x_{i+1}-x_i|\to 0 \\ y_{k+1}-y_k|\to 0}} \sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

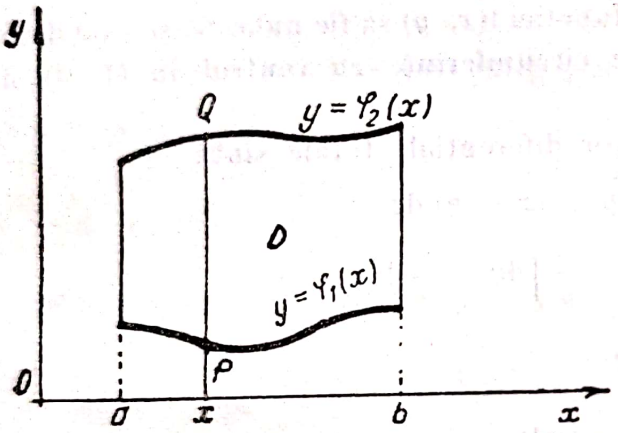

Fig. 1

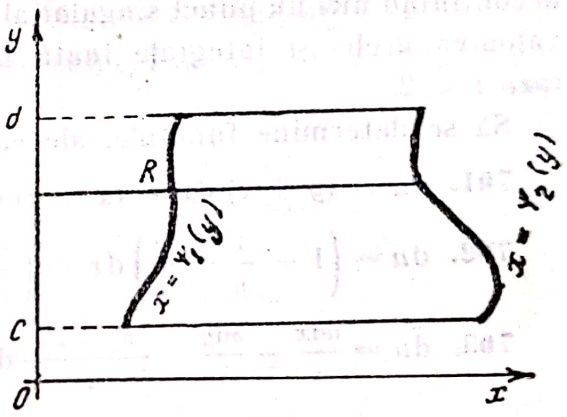

Fig. 2

Modul de calcul :

1) Presupunem că o paralelă la Oy dusă între a şi b taie curbele $y = \varphi_1(x)$; $y = \varphi_2(x)$ respectiv în $P[x, \varphi_1(x)]$, $Q[x, \varphi_2(x)]$. Pentru x constant y creşte de la $\varphi_1(x)$ la $\varphi_2(x)$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

în ultima integrală x este constant, deci ea se face în raport cu y.

2) Compactul D este definit prin

$$c \leqslant y \leqslant d\,;\ x = \Psi_1(y)\,;\ x = \Psi_2(y)$$

în care caz

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

în ultima integrală y este constant.

Scanned with OKEN Scanner

INTEGRALA DUBLĂ ÎN COORDONATE CURBILINII

Fie $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ două funcţii continui şi continui diferenţiabile care realizează o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între punctele compactului D din xOy şi punctele lui D' din uOv. Iacobianul $J \neq 0$ în D' păstrează un semn constant, atunci

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|J|\,du\,dv.$$

FORMULA LUI GREEN-RIEMANN

Fie C frontiera compactului D şi funcţiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ continue şi avînd derivate parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue în $D + C$;

atunci avem

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{C+} P\,dx + Q\,dy$$

Problema schimbării de variabile într-o integrală dublă este cu totul diferită de aceea demonstrată pentru integralele de o singură variabilă; pentru aceste integrale dx se înlocuieşte prin $x'(t)dt$, adică se consideră dx ca o diferenţială. Dacă într-o integrală dublă am considera simbolul $dxdy$ ca produsul a două diferenţiale am ajunge în ceea ce priveşte schimbarea de variabile la o absurditate. Este deci evident că notaţia $dxdy$ destinată a reaminti iniţial că măsura aleasă în $\mathbf{R}^2$ este produsul măsurilor în $\mathbf{R}$, nu convine în acest caz.

Se poate introduce convenţia următoare, în loc de a scrie $dxdy$ se va scrie $dx \wedge dy$, atribuind acestui simbol numit produs exterior proprietăţile bine cunoscute ale produsului vectorial.

În general $(a, b) = a \wedge b$, va fi presupus liniar în raport cu a, liniar în raport cu b şi anti-simetric $(a \wedge b) = -(b \wedge a)$. În particular $a \wedge a = 0$. Se fac aceste convenţii pentru simbolurile du, dv, dx, dy, derivatele parţiale fiind considerate ca numere. Rezultă

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}\,du \wedge \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial u}\,du \wedge \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \wedge \frac{\partial y}{\partial u}\,du +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \wedge \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \text{ sau } dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\right)(du \wedge du) + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(du \wedge dv) +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,(dv \wedge du) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(dv \wedge dv)$$

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du \wedge dv = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du \wedge dv$$

$dx \wedge dy$ se numeşte diferenţiala exterioară a lui (x, y).

Scanned with OKEN Scanner

Integrala dublă $\iint_D f(x, y)dx \wedge dy$ poate fi calculată cu ajutorul unei schimbări de variabile supuse condițiilor precedente considerînd dx, dy ca diferențiale, $dx \wedge dy$ se transformă în $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} du \wedge dv$. Se scrie atunci:

$$\iint_D (f(x, y)dx \wedge dy = \varepsilon \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du \wedge dv$$

ε fiind $+1$ sau -1. Se va utiliza notația: $\iint_D f(x, y)dx\, dy$ cînd trebuie calculată efectiv această integrală prin formula:

$$\iint_D f(x, y)dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

Se va utiliza și notația:

$$\iint f(x, y)dx \wedge dy$$

cînd este necesară o schimbare de variabilă.

INTEGRALE DUBLE

707. Se consideră integrala $\iint_D f(x, y)dx\, dy$, D fiind limitat de curbele $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; $y^2 = 4ax$; $x = 2a$, $y \geqslant 0$ și $a > 0$. Să se determine limitele de integrare și apoi să se schimbe ordinea de integrare.

Să se calculeze următoarele integrale duble:

708. $\iint_D \frac{x^2 dx\, dy}{1 + y^2}$ D este dreptunghiul de laturi

$$x = 0;\ x = 1;\ y = 0,\ y = 1$$

709. $\iint_D \frac{y\, dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ D este cel precedent.

710. $\iint_D (x^2 + y)dx\, dy$ D este domeniul limitat de curbele

$$y = x^2,\ y^2 = x$$

711. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx\, dy$ D este domeniul limitat de curbele

$$y = x;\ y = \frac{1}{x};\ x \in [1, 2].$$

712. $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$ D este domeniul limitat de

$$y = x;\ y = 0,\ x = 1.$$

713. $\iint_D \frac{2x\, dx\, dy}{\sqrt{1 + y^4 - x^4}}$ D este domeniul limitat de

$$y = x;\ y = 0;\ y = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

714. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ D este domeniul limitat de

$$x - y = a;\quad x = 1;\quad y = 0 \quad 0 \leqslant a \leqslant 1$$

715. $\iint\limits_D x^2 y \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\,dx\,dy$ D este domeniul limitat de

$$x^3 + y^3 = 1;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0.$$

716. $\iint\limits_D x^{p-1} y^{q-1}\,dx\,dy$ $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. D este domeniul limitat de

$$x + y = 1;\ x = 0;\ y = 0$$

717. $\iint\limits_D x^{p-1} y^{q-1}(1 - x - y)^{r-1} dx\,dy$ $p \geqslant 1;\ q \geqslant 1;\ r \geqslant 1$

D este domeniul limitat de $x + y = 1;\ x = 0,\ y = 0.$

718. $I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y}$ $0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

719. Să se calculeze integrala

1) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\lambda - \cos x}$

2) Fie D dreptunghiul cu vîrfurile în punctele $(0,\ a)$; $(\pi,\ a)$; $(\pi,\ b)$; $(0,\ b)$; $b > a > 1$. Să se calculeze integrala dublă:

$$I(a,\ b) = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{y - \cos x}$$

3) Să se deducă valoarea integralei

$$\int\limits_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x}\,dx$$

720. Din calculul $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1 + y\cos x}$ întinsă la $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant a < 1$ să se deducă valoarea integralei

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx$$

Schimbarea de variabilă în integrale dublă

Să se calculeze

721. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dx\,dy$. D este domeniul din primul cadran limitat de $x^2 + y^2 = a^2;\ y = x\sqrt{3};\ y\sqrt{3} = x.$

722. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dx\,dy$, D este sfertul de cerc unitar din primul cadran.

723. $\iint\limits_D \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; D este sfertul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ din primul cadran.

Scanned with OKEN Scanner

724. $\iint\limits_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx,\,dy$, D este exteriorul elipsei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

725. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$; $\begin{cases} 1)\ D \text{ este interiorul parabolei } y^2=2x \\ 2)\ D \text{ este exteriorul parabolei } y^2=2x. \end{cases}$

726. $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dx\,dy$; D este $\mathbf{R}^2$

727. $J=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dx\,dy$; D este $\mathbf{R}^2$

728. $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)^2}$; D este $x^2+y^2-a^2\leqslant 0$

729. $I=\iint\limits_D xy\sqrt{x^2+4y^2}\,dx\,dy$; D este sfertul de cerc unitar din primul cadran.

730. $I=\int\limits_0^a\int\limits_0^b \frac{dx\,dy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}}$;

731. $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}(x^2+y^2+b^2)^{1/2}}$; D este $\mathbf{R}^2$.

732. $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$; $\begin{cases} D \text{ este } \mathbf{R}^2. \\ 1.\ \text{Calculînd direct} \\ 2.\ \text{În coordonate polare.} \end{cases}$

733. $I=\iint\limits_D \frac{2ay-x^2-y^2}{y}\,dx\,dy$; D este interiorul cercului

$$x^2+y^2-2ay=0,\ y\leqslant a$$

734. Să se calculeze

$I=\iint\limits_D e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\,dx\,dy$; D este limitat de $y^2-2px=0$, $x^2-2py=0$ folosind schimbarea de variabile $x=u^2v$, $y=uv^2$.

Să se calculeze

735. $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$; D este limitat de

$x^2+y^2-2x=0$; $x^2+y^2-4x=0$;
$x^2+y^2-2y=0$; $x^2+y^2-6y=0$.

736. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2}\,dx\,dy$; D este interiorul cercului

$$x^2+y^2-2ax=0,\ a>0.$$

737. $\iint\limits_D e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$; D este limitat de

$$x+y=1,\ x=0,\ y=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

738. $\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$; D este definit de $y \geqslant 0$ $0 \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\theta)$

739. Folosind integrala dublă să se stabilească relaţia:

$$B(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

740. Folosind integrala dublă să se calculeze

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

741. Aplicînd formula lui Green-Reimann să se calculeze

$$\int\limits_{\Gamma^+} -y^3dx + x^3dy;\ \Gamma \text{ fiind cercul } \rho = 1$$

742. Să se calculeze $\iint\limits_D (4x - 3 - x^2 - y^2)dx\,dy$;

D este $x^2 + y^2 - 4x - 3 \leqslant 0$.

Să se verifice rezultatul cu formula lui Green.

743. Fie Γ conturul domeniului D definit de $x^2 + y^2 - 2ay < 0$; $y \geqslant a$.
Să se calculeze $I = \int\limits_{\Gamma^+} 3xy[x\ dy + (2a - y)dy]$

744. a) Să se demonstreze că

$$\int\limits_\Gamma e^{-x^2+y^2}\,[\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy]$$

luată pe o curbă Jordan rectificabilă închisă este nulă.

b) Să se exprime rezultatul precedent luînd pentru Γ conturul dreptunghiului de laturi

$$x = 0;\ x = a;\ y = 0;\ y = b;\ a > 0;\ b > 0.$$

c) Să se arate că $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ este convergentă şi să se calculeze valoarea ştiind că $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

745. Să se calculeze

$$I = \int\limits_\Gamma (x^3 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy$$

Γ fiind sfertul de cerc AB completat cu razele OA şi OB. Se presupune $OA = 1$ şi unghiul $\widehat{xOA} = \theta_0$(fig. 3).

746. Să se calculeze $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

$$D = \{(x,\ y) \mid x + y - a\sqrt{2} \geqslant 0,\ y - x + a\sqrt{2} \geqslant 0\} \quad \text{(fig. 4.)}$$

Folosind integrala dublă să se calculeze ariile domeniilor limitate de curbele:

747. $y = x + 2$, $y = x^2$; 748. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

749. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 \quad b^2y^2$; 750. $(x + y)^4 = ax^2y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

751. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2y}{c^2}$;

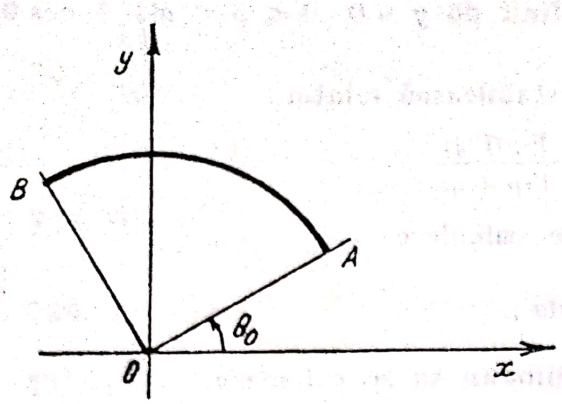

Fig. 3

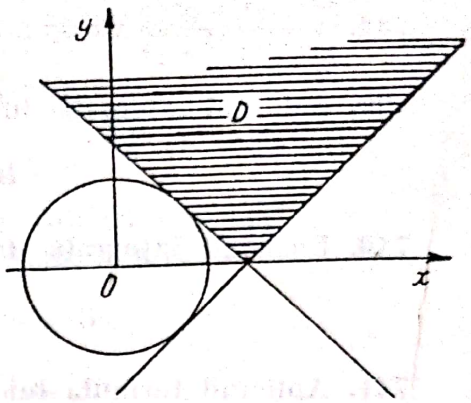

Fig. 4

752. $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$, $p < q$, $a < b$

753. $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $0 < p < q$, $0 < a < b$

754. Fie lemniscata $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Să se calculeze aria porțiunii A a unei bucle din această curbă exterioară cercului $\rho = a$.

Folosind integrala dublă să se calculeze volumele limitate de următoarele suprafețe:

755. $z = \frac{xy}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $z = 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

756. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$, $a > 0$

757. $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$

758. $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 = z^2$

759. $x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$

760. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} = 2z$, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 2(2 - z)$

761. $x^2 + y^2 = cz$, $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $c > 0$

762. $x^2 + y^2 = z^2$, $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $z = 0$

763. $x^2 + y^2 = 2az$, $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$, $z = 0$

764. Să se calculeze volumul cuprins între planul xOy, cilindrul cu generatoarele paralele cu Oz având ca secțiune dreaptă o curbă Γ a planului xoy și suprafața $z = f(x) + g(y)$ cu ajutorul unei integrale curbilinii atașate curbei Γ fără a folosi primitivele lui f și g. Se presupune $z > 0$.

765. Să se calculeze momentul de inerție al ariei cercului de rază a în raport cu un diametru, densitatea fiind 1.

766. Să se calculeze momentul de inerție al ariei elipsei de semiaxe a și b în raport cu centrul ei.

767. Să se calculeze momentul de inerție al ariei lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$ în raport cu centrul ei.

768. Să se determine baza b a dreptunghiului de înălțime $2a$ care trebuie adăugat semicercului de rază a, astfel ca centrul de greutate al întregii plăci să fie în centrul cercului.

769. Să se determine centrul de greutate al ariei mărginită de curbele $\rho = a \cos\theta$ și $\rho = b \cos\theta$, $b > a$.

770. Să se determine centrul de greutate al ariei dreptunghiului de laturi a și b și a cărei densitate variază proporțional cu pătratul distanței de la unul din vîrfurile sale.

Scanned with OKEN Scanner

771. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$I = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \text{ și } I = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Să se determine α astfel ca integralele următoare să fie convergente:

772. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, D este $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

773. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, D este $x^2 + y^2 \geqslant 1$;

774. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, D este $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

În următoarele integrale α, β și m fiind pozitive să se cerceteze convergența.

775. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}$, $x^\alpha + y^\beta \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

776. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}$, $x^\alpha + y^\beta \geqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

777. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^\alpha-y^\beta)^m}$, $x^\alpha + y^\beta \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

778. 1) Fie α un număr real, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, se notează prin $Q(\alpha)$ domeniul

$$Q(\alpha)\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x + y \leqslant 2(1-\alpha). \end{cases}$$

Pentru orice α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ se notează

$$I(\alpha) = \iint_{Q(\alpha)} \frac{dx\,dy}{1-xy};$$

Să se arate (fără a calcula această integrală) că $I(\alpha)$ este o funcție descrescătoare de α pe $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru ce se exclude valoarea $\alpha = 0$?

2) Cu ajutorul schimbării de variabile

$$x = u - v$$
$$y = u + v$$

Să se arate că

$$\frac{1}{4} I(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\, du;$$

3) Să se calculeze $I(\alpha)$ folosind schimbarea de variabilă $\theta = \arcsin u$. Să se deducă că $I(\alpha)$ este o funcție continuă pe $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ și că dacă α tinde către 0, $I(\alpha)$ tinde către $\frac{\pi^2}{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XI

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

Aria unei suprafețe este dată de formulele :

1) $S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$ dacă $z = f(x, y)$ este ecuația suprafeței, iar D proiecția suprafeței pe planul xOy. O paralelă la oz întîlnind suprafața într-un singur punct, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

2) $S = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ dacă suprafața este dată prin ecuațiile $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, iar Δ este domeniul de variație al lui u și v.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMA SPEȚĂ

Fie $f(x, y, z)$ o funcție continuă pe suprafața S de ecuația $z = \varphi(x, y)$ cu plan tangent variind continuu. O paralelă la oz întîlnește suprafața într-un singur punct.

Se numește integrală de suprafață de prima speță

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$$

unde (x_i, y_i, z_i) un punct aparținînd lui $\Delta\sigma_i$.

Calculul integralei se face după formula :

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D [f(x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

D proiecția lui S pe planul xoy

sau $\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$

Δ domeniul lui (u, v).

INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE A DOUA SPEȚĂ

$P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ fiind funcții continui pe suprafața S, se numește integrală de a doua speță.

$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ fiind cosinusurile directoare ale normalei la suprafață. Calculul se reduce la cele de prima speță.

Scanned with OKEN Scanner

779. Să se calculeze aria porțiunii suprafeței $z = \frac{1}{a}xy$, $a > 0$, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$.

780. Să se calculeze aria suprafeței $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situată în exteriorul cilindrilor $x^2 + y^2 = \pm ax$ (Viviani).

781. Să se calculeze aria suprafeței $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2x$.

782. Să se calculeze aria decupată a cilindrului $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ în suprafața $x^2 + y^2 = 2az$.

783. Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ în suprafața $az = xy$.

784. Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ în sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Să se calculeze ariile mărginite de următoarele suprafețe:

785. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

786. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

787. $(x^2 + y^2 + z^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

788. $(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2x^2y^2$.

789. Să se calculeze $\iint\limits_S (x + y + z)\,d\sigma$, unde S este suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z \geqslant 0$.

790. Să se calculeze $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,d\sigma$, unde S este porțiunea suprafeței conice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafața $x^2 + y^2 = 2ax$.

791. Să se calculeze $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{\rho}$ unde S este suprafața unui elipsoid, iar ρ este distanța centrului elipsoidului la planul tangent elementului $d\sigma$ al suprafeței elipsoidului.

792. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei porțiuni omogene din suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, pentru $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

793. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porțiunii de pe suprafața omogenă $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, decupată de suprafața $x^2 + y^2 = ax$.

794. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz, al pînzei sferice omogene

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geqslant 0)$$

de densitate ρ_0.

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață:

795. $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$.

S fiind fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

796. $\iint\limits_S \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dx\,dz}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$

S fiind fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XII

INTEGRALE TRIPLE

Integralele triple și mai general integralele multiple se definesc și se calculează ca și integralele duble. Pentru a calcula o integrală triplă se poate proceda în diferite moduri reducînd integrala triplă la o suprapunere de integrale simple și duble.

f fiind o funcție continuă pe compactul simplu $a \leqslant x \leqslant b$; $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$; $\psi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x, y)$. $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ fiind funcțiuni continui pe $[a, b]$, $\psi_1(x, y)$ și $\psi_2(x, y)$ fiind funcții continui pe compactul simplu B proiecția ortogonală a lui A pe planul xoy (fig. 5).

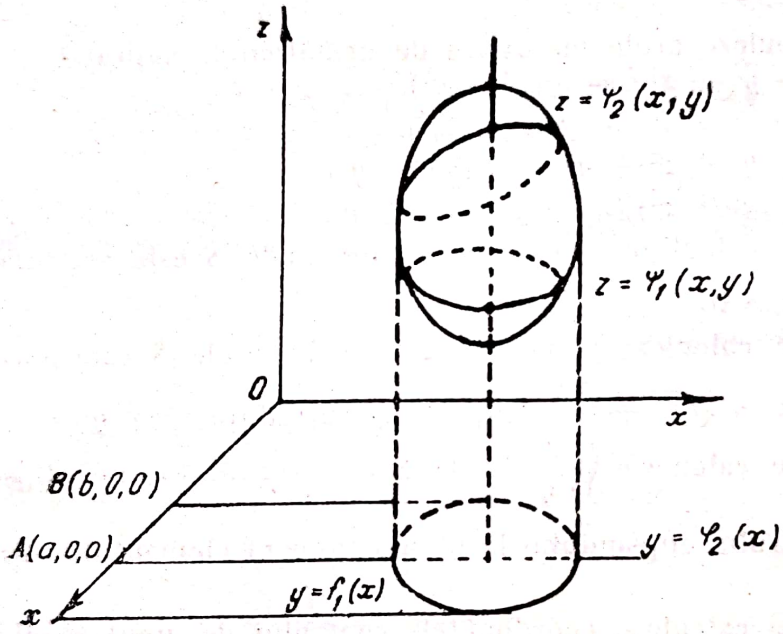

Fig. 5

Se obține:

$$I = \iiint_A f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint_B dx\,dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

I este deci suprapunerea unei integrale simple și a unei integrale duble. Se poate calcula integrala dublă ca o suprapunere de două integrale simple și aceasta în două moduri diferite. Se obține:

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Schimbarea de variabile. Fie A o mulțime de puncte (u, v, w) din $\mathbf{R}^3$ și φ o aplicație a lui A în $\mathbf{R}^3$, care transformă A în E. Se presupune că φ este

biunivocă şi bicontinuă şi că derivatele lui x, y şi z în raport cu u, v, w sînt continui, se presupune că determinantul

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

nu se anulează în A. În aceste condiţii $f(x, y, z)$ fiind continuă, rezultă:

$$I = \iiint_E f(x, y, z)dx\, dy\, dz = \iiint_A F(u, v, w) \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} du\, dv\, dw$$

unde $F(u, v, w) = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]$.

Se poate introduce notaţia $dx \wedge dy \wedge dz$, cu condiţia ca $(a, b, c) \to a \wedge b \wedge c$ să fie liniară în a, b şi c şi alternantă.

Coordonate cilindrice. Dacă φ, θ, z sînt coordonatele cilindrice ale unui punct x, y, z, avem

$$I = \iiint_A f(\rho\cos\theta, \rho \sin\theta, z)\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

Coordonate sferice. Dacă ρ, θ, φ sînt coordonatele sferice ale unui punct x, y, z, avem

$$I = \iiint_A f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Să se calculeze următoarele integrale triple:

797. $\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}$, $D: x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y + z \leqslant 1.$

798. $\iiint_D \frac{z^3\, dx\, dy\, dz}{(y + z)(x + y + z)}$, $D: x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y + z \leqslant 1.$

799. $\iiint_D xy\, dx\, dy\, dz$, $D: x^2 + y^2 \leqslant 1;\ z \geqslant 0;\ z \leqslant 1;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0.$

800. $\iiint_D xyz\, dx\, dy\, dz$, $D: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0.$

801. $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)dx\, dy\, dz$, $D: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0.$

802. $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)dx\, dy\, dz$, $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqslant 0;\ x \geqslant 0;$ $y \geqslant 0;\ z \geqslant 0.$

803. $\iiint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}\, dx\, dy\, dz$, $D: x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqslant 0;$

804. $\iiint_D (x^2 + y^2 - z^2)dx\, dy\, dz$, $D: x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqslant 0;$

805. $\iiint_D (x^2 + y^2 + xy)dx\, dy\, dz$, $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \geqslant c^2;$ $(a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2)$

806. $\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}}$: $D: x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqslant 0.$

Scanned with OKEN Scanner

807. a) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{3-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)dz.$$

b) Se poate reprezenta I printr-o integrală triplă. Să se determine domeniul de integrare.

c) Să se refacă calculul integrînd în primul rînd în raport cu x, apoi în raport cu y și în sfîrșit în raport cu z.

Să se determine domeniul de integrare și să se calculeze următoarele integrale triple:

808. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

809. $\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz.$

810. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

Să se calculeze trecînd la coordonate sferice integralele

811. $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,\ D: x^2+y^2+z^2-z\leqslant 0$

812. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz.$

813. Printr-o schimbare de variabile convenabilă să se calculeze integrala:

$$\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

D fiind compactul mărginit de elipsoidul.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\leqslant 0.$$

814. Să se calculeze integrala:

$$\iiint_D [5(x-y)^2+3az-4a^2]dx\, dy\, dz,$$

$$D: x^2+y^2-az\leqslant 0;\ x^2+y^2+z^2-2a^2\leqslant 0.$$

815. Să se calculeze:

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx\, dy\, dz$$

$$p>0;\ q>0;\ r>0;\ s>0;\ D: x+y+z-1\leqslant 0;$$

$$x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0.$$

Să se calculeze volumele mărginite de suprafețele:

816. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}.$

Scanned with OKEN Scanner

807. a) Să se calculeze integrala :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{3-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)dz.$$

b) Se poate reprezenta I printr-o integrală triplă. Să se determine domeniul de integrare.

c) Să se refacă calculul integrînd în primul rînd în raport cu x, apoi în raport cu y și în sfîrșit în raport cu z.

Să se determine domeniul de integrare și să se calculeze următoarele integrale triple :

808. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

809. $\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)dz.$

810. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

Să se calculeze trecînd la coordonate sferice integralele

811. $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,\ D : x^2 + y^2 + z^2 - z \leqslant 0$

812. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz.$

813. Printr-o schimbare de variabile convenabilă să se calculeze integrala :

$$\iiint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

D fiind compactul mărginit de elipsoidul.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqslant 0.$$

814. Să se calculeze integrala :

$$\iiint_D [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]dx\, dy\, dz,$$

$$D : x^2 + y^2 - az \leqslant 0\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2 \leqslant 0.$$

815. Să se calculeze :

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx\, dy\, dz$$

$$p > 0\ ;\ q > 0\ ;\ r > 0\ ;\ s > 0\ ;\ D : x + y + z - 1 \leqslant 0\ ;$$

$$x \geqslant 0\ ;\ y \geqslant 0\ ;\ z \geqslant 0.$$

Să se calculeze volumele mărginite de suprafețele :

816. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$

Scanned with OKEN Scanner

817. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$;

818. $z^2=2xy,\ (x^2+y^2)^2=2a^2xy,\ z\geqslant 0;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0$;

819. $x^2+y^2=z,\ z^2=xy;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0$;

820. Să se calculeze volumul comun cilindrilor:

$$x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2;$$

Să se calculeze volumele mărginite de suprafețele:

821. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

822. $(x^2+y^2+z^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2)$;

823. $(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)=4a^2x^2y^2$;

824. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$;

825. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$;

826. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$;

827. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$;

828. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax$;

829. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2y}{h^3}$;

830. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}$;

831. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0$;

Să se determine coordonatele centrului de greutate al solidului comun suprafețelor:

832. $x^2+y^2+z^2=3a^2,\ x^2+y^2=2az$;

833. $x^2+y^2=z,\ x+y+z=0$;

834. $x^2+y^2+z^2=R^2,\ y^2+z^2=x^2,\ x\geqslant 0$;

835. Să se determine centrul de greutate al solidului omogen mărginit de suprafața

$$(x^2+y^2+z^2)^2=axyz \text{ pentru } x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0.$$

836. Să se calculeze momentul de inerție al torului

$$x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi;\ y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi;\ z=r\sin\theta$$

în raport cu axa sa de rotație.

837. Să se calculeze volumul mărginit de suprafața $(x^2+y^2+z^2)^4=a^3x^2y^2z$ și situat în primul octant al axelor de coordonate. Să se calculeze integrala

$$\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

întinsă la acest volum.

838. Fie f_1, f_2, f_3 trei funcții continui în $\mathbf{R}^3$ cu valori în $\mathbf{R}$, nule în afara unui pătrat de latură a. Să se arate că:

$$\left[\iiint_{\mathbf{R}^3} f_1(x,y)f_2(x,y)f_3(x,y)\,dx\,dy\,dz\right]^2\leqslant\prod_{i=1}^{3}\iint_{\mathbf{R}^2}[f_i(x,y)]^2\,dx\,dy$$

839. Să se calculeze $I = \iiint\limits_D \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{x^2 - y^2 + z^2}$ unde

$$D = \{(x, y, z),\ z^2 \leqslant x^2 - y^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}.$$

840. Să se calculeze $I_k = \iiint\limits_D \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ unde

$D = \{(x, y, z)|,\ z \geqslant 0;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y^2 - 2xz \leqslant 0,\ x^2 + y^2 \geqslant k^2 z^2\}$.
Să se calculeze $\lim\limits_{k \to 0} I_k$.

CAPITOLUL XIII

ANALIZA VECTORIALĂ

Formule integrale

În acest capitol se studiază numai spațiul $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu structura euclidiană. ($\mathbf{R}^3$ este spațiul obișnuit al geometriei euclidiene tridimensionale.)

Toate reperele vor fi presupuse ortonormale. Se notează cu O originea, prin M un punct oarecare al spațiului și prin x, y, z coordonatele lui M în reperul ales. Într-un cîmp de vectori elementul asociat punctului M va fi notat $\bar{V}(M)$, iar componentele sale vor fi $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ sau $P(x, y, z)$. $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

I. Integrala de suprafață. Flux. Se notează prin:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v);\quad (u, v) \in D$$

o reprezentare de clasă C^1, a unei surafețe S și prin $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ componentele vectorului $\bar{r}(u, v)$. Dacă S este orientată, sensul vectorului $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ este independent de reprezentarea aleasă și definește normala orientată la S, vectorul unitate al acestei normale va fi notat $\bar{\mathbf{n}}$. Componentele vectorului $\left\{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\} du\,dv$ sînt:

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\,du\,dv = dy \wedge dz;\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\,du\,dv = dz \wedge dx;\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv = dx \wedge dy.$$

1. Fluxul Φ al cîmpului de vectori $\bar{V}(M)$ traversînd suprafața orientată S este integrala formei diferențiale exterioare $d\Phi = \bar{V}(M) \cdot \bar{\mathbf{n}}\,d\sigma = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$.

II. Formula generală a transformării integralelor. Teoremele fundamentale sînt aplicații la cazuri particulare ale relației:

$$\int_{\partial x} \omega = \int_x \alpha d\omega$$

Scanned with OKEN Scanner

În această formulă: ω este o formă diferențială și $d\omega$ diferențiala sa exterioară: ∂X este marginea lui X, orientările lui X și ∂X fiind asociate.

III. **Formula lui Stokes-Rotorul**

1. Fie $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

X este o suprafață S, și ∂X conturul Γ a lui S, triedrul format de normala orientată la S, de tangenta orientată la Γ și de semitangenta într-un punct al lui Γ la o curbă trasată pe S este direct. P, Q, R sînt funcții de clasă C^1 într-o vecinătate a lui S. În aceste condiții

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

2. Dacă $\bar{V}(M)$ este un vector de componente P, Q, R se numește rotorul lui $\bar{V}(M)$ vectorul

$$\text{rot } \bar{V}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$$

rot $\bar{V}$ nu depinde de reperul ortonormal ales. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ fiind vectorii de bază avem:

$$\text{rot } \bar{V} = \bar{i} \wedge \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + j \wedge \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{k} \wedge \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}; \quad \text{rot } \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

3. Folosind această definiție a rotorului și orientările indicate mai sus pentru S și Γ, formula lui Stokes devine

$$\oint_\Gamma \bar{V}(M)\, d\bar{r} = \iint_S \bar{n} \cdot \text{rot } \bar{V} d\sigma$$

adică: circulația vectorului cîmp de-a lungul unei curbe închise este egală cu fluxul rotorului lui prin orice suprafață S ce se sprijină pe această curbă închisă.

IV. **Formula lui Gauss-Ostrogradski.** *Divergența*

1) Fie $\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

X este interiorul D, al unei suprafețe închise S și ∂X suprafața S; orientarea pe S fiind aleasă în așa fel ca normala orientată să fie exterioară lui D, P, Q, R sînt funcții de clasă C^1 în D și sînt continui în $D \cup S$. În aceste condiții avem:

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $\bar{V}(M)$ este vectorul de componente P, Q, R se numește divergența cîmpului $\bar{V}(M)$, expresia :

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\bar{i}\cdot\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}+\bar{j}\cdot\frac{\partial \bar{V}}{\partial y}+\bar{k}\cdot\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$$

$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ fiind vectorii de bază ; divergența lui $\bar{V}$ nu depinde de reperul ortonormal ales.

3) Folosind această definiție a divergenței, formula lui Gauss-Ortrogradski devine :

$$\iiint_D \operatorname{div}\bar{V}(M)\,dv=\iint_S \bar{V}(M)\cdot\bar{n}\,d\sigma,$$

Adică integrala triplă a divergenței unui cîmp $\bar{V}(M)$ continuu diferențiabil pe un compact simplu D, este egal cu fluxul cîmpului $\bar{V}(M)$ prin suprafața frontieră a domeniului D.

V. Gradient — Potențial.

1) Dacă $\varphi(x, y, z)$ este o funcție diferențiabilă într-un domeniu deschis D din $\mathbf{R}^3$, vectorul

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\bar{k}$$

nu depinde reperul ortonormal ales și se numește grad φ. Rotorul unui cîmp de gradienți este nul.

2) Cîmpul de vectori $\bar{V}(M)$ este cîmpul gradienților unei funcții φ (sau condiție echivalentă, $\omega=\bar{V}(M)\cdot d\bar{r}$ este diferențiala unei funcții φ, dacă și numai dacă pentru orice curbă închisă Γ,

$$\int_\Gamma \omega=\int_\Gamma \bar{V}(M)\cdot d\bar{r}=0.$$

Dacă $\bar{V}(M)$ este definită și de clasa C^1 într-o sferă, o condiție echivalentă este rot $\bar{V}=0$. Atunci cîmpul de vectori $\bar{V}(M)$ derivă dintr-o funcție de forță φ sau din potențialul $-\varphi$.

VI. Potențial vector. Dacă cîmpul de vectori $\bar{V}(M)$ este definit și de clasă C^1 într-o sferă, fluxul lui $\bar{V}(M)$ traversînd întreaga suprafață închisă este nul, dacă și numai dacă div $\bar{V}(M)=0$. În acest caz există funcții vectoriale $\bar{U}$, astfel ca : $\bar{V}=\operatorname{rot}\bar{U}$ (există o infinitate de astfel de funcții, diferența dintre două din ele fiind un gradient). Una oarecare din funcțiile $\bar{U}$ se numește potențial vector al cîmpului $\bar{V}(M)$ și se știe (formula lui Stokes) că fluxul cîmpului $\bar{V}(M)$ traversînd suprafața S este egală cu circulația potențialului vector $\bar{U}$ în lungul conturului Γ a lui S.

841. Să se calculeze fluxul vectorului de poziție $\bar{r}$ prin suprafața : $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

842. Să se calculeze fluxul cîmpului de vectori

$$\bar{V}=x^2\bar{i}+y^2\bar{j}+z^2\bar{k}$$

prin octantul pozitiv al sferei $x^2+y^2+z^2=1$, $(x>0\,;\ y>0\,;\ z>0)$.

843. Să se calculeze fluxul vectorului :

$$\bar{V}=y\bar{i}+z\bar{j}+x\bar{k}$$

prin suprafața totală a piramidei mărginită de planele $x=0$; $y=0$; $z=0$ și $x+y+z=a$; $(a>0)$. Să se verifice rezultatul aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind formula lui Stokes să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

844. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = a$ parcurs în sens invers sensului de mișcare al acelor unui ceasornic dacă se privește din partea pozitivă a axei ox.

845. $\int_{ABC} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$

luată de-a lungul laturilor triunghiului definit pe punctele $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$.

846. $\oint_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$

unde C este curba lui Viviani definită prin intersecția suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

847. Se notează prin a, b, h numerele reale, astfel ca $a \leqslant h \leqslant b$ și se consideră, în spațiul R^3 raportat la un reper ortonormal de origine O:

— zona sferică S definită prin

$$h \leqslant z \leqslant b, \quad x^2 + y^2 + z^2 - z(a + b) + ab = 0$$

— discul D definit prin

$$z = h, \quad x^2 + y^2 + h^2 - h(a + b) + ab \leqslant 0$$

— mulțimea Ω interioară reuniunii lui S cu D.

Se consideră cîmpul de vectori, obținut asociind oricărui punct M vectorul $\bar{V}(M) = \bar{r}$.

1) Să se calculeze volumul lui Ω.

2) Să se calculeze fluxul Φ_0 al cîmpului de vectori $\bar{V}(M)$ traversînd discul D, normala fiind orientată în sensul pozitiv al axei oz și să se deducă fluxul Φ al acestui cîmp traversînd suprafața S.

3) Să se calculeze direct fluxul cîmpului $\bar{V}(M)$ traversînd suprafața S, făcînd schimbarea de variabile $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafață:

848. $\iint_S x^3dy \wedge dz + y^3dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy$

S fiind fața exterioară a sferei: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

849. $\iint_S (x^2\alpha + y^2\beta + z^2\gamma)d\sigma$, unde S este porțiunea suprafeței conice $x^2 + y^2 = z^2$, $(0 \leqslant z \leqslant h)$, iar α, β, γ, sînt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la această suprafață.

850. $\iint_S yz\,dy \wedge dz + zx\,dz \wedge dx + xy\,dx \wedge dy$

S fiind o suprafață închisă.

851. $\iint_S \frac{\partial u}{\partial x}dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y}dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z}dx \wedge dy$

S fiind o suprafață închisă.

852. $\iint_S xyz(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$

$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

853. $\iint_S x^3dy \wedge dz + x^2y\,dz \wedge dx + x^2z\,dx \wedge dy$,

S fiind suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$ cuprinsă între planele $z = 0$, $z = a$.

Scanned with OKEN Scanner

854. Fie S o porțiune de suprafață orientată mărginită de o curbă închisă Γ. Se notează cu α, β, γ, cosinusurile directoare ale normalei orientate la suprafața S.

1) Să se transforme într-o integrală curbilinie integrala de suprafață:

$$I = \iint_S [\alpha x(z^2 - y^2) + \beta y(x^2 - z^2) + \gamma z(y^2 - x^2)]\, d\sigma.$$

2) Să se calculeze I, cînd S este porțiunea planului $x = 1$, definită prin $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z + y \geqslant 0$, $z - y \geqslant 0$.

855. Într-un spațiu euclidian cu trei dimensiuni raportat la un reper ortonormal de origine O se asociază oricărui punct $M \neq 0$ vectorul $\bar{V}(M)$:

$$\bar{V}(M) = \frac{x}{r^3}\bar{i} + \frac{y}{r^3}j + \frac{z}{r^3}\bar{k}$$

unde x, y, z sînt coordonatele lui M și r modulul vectorului de poziție a lui M.

1) Să se verifice ca vectorul $\bar{V}(M)$ este un gradient și că divergența sa este nulă.

2) Care este interpretarea geometrică a valorii fluxului vectorului $\bar{V}(M)$ printr-o porțiune S a sferei unitate cu centrul în origine, orientat către exterior?

Se notează cu Σ o suprafață întîlnită într-un punct cel mult de orice semi-dreaptă de origine O, normala orientată într-un punct M făcînd un unghi ascuțit cu vectorul $\bar{r}$. Să se arate că fluxul vectorului $\bar{V}(M)$ prin suprafața Σ este egal cu unghiul solid al conului C de vîrf O și de bază Σ (unghiul solid al unui con de vîrf O este aria intersecției acestui con și al sferei unitate de centru O).

3) Să se determine potențialul vector $\bar{A}$ al cîmpului de vectori $\bar{V}(M)$, astfel ca $\bar{A}$ să fie paralel cu planul xoy.

856. În spațiul euclidian tridimensional, raportat la un reper ortonormal de origine O se asociază punctului M de coordonate x, y, z vectorul

$$\bar{V}(M) = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$$

1) Să se arate că există un potențial vector și să se determine o formă diferențială ω, a cărei diferențială exterioară să fie:

$$d\omega = yz\, dy \wedge dz + zx\, dz \wedge dx + xy\, dx \wedge dy.$$

2) Să se determine fluxul vectorului $\bar{V}(M)$ prin suprafața S, definită prin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Normala în punctul M fiind orientată în sensul vectorului $\overrightarrow{OM}$.

857. Se consideră spațiul $\mathbf{R}^3$, raportat la un reper ortonormal $oxyz$. Se notează cu S suprafața definită prin $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$; $0 \leqslant z \leqslant 1$. Se notează cu Γ cercul de ecuații $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Fie C suprafața cilindrică $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Se consideră forma diferențială.

$$\omega = xf(x)dy \wedge dz + [2y - 3yf(x)]dx \wedge dz - 2z\, dx \wedge dy$$

unde f este o funcție continuu derivabilă astfel ca $f(1) = 1$.

1) Cum trebuie ales f pentru ca diferențiala exterioară a lui ω să fie nulă?

2) Se presupune că f este funcția găsită la punctul precedent.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze valoarea absolută a integralei lui ω întinsă la suprafața S.

b) Să se găsească două funcții continuu diferențiabile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ identic nule în (x, y) cînd $z = 0$ și astfel ca forma diferențială de gradul 1, să aibă ca diferențială exterioară pe ω.

c) P și Q astfel aleși, să se calculeze valoarea absolută a integralei curbilinii a lui ω în lungul curbei Γ.

3) Se presupune acum că pentru orice x, $f(x) = 1$.

Să se calculeze atunci valoarea absolută a integralei lui ω întinsă la suprafața C.

CAPITOLUL XIV

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Noțiuni generale. O ecuație diferențială de primul ordin $F(x, y, y') = 0$ admite ca soluție o familie de funcții depinzînd de un parametru arbitrar $y = f(x, c)$. Această proprietate va fi verificată în toate cazurile întîlnite. În general se interpretează x și y ca fiind coordonatele rectangulare ale unui punct din plan, de unde un fascicul de curbe integrale. Alte interpretări geometrice sînt adesea mai bine adoptate, de exemplu x și y pot fi coordonatele polare $x = \theta$, $y = \rho$. Este important deci de a separa problema analitică de interpretările geometrice posibile.

De îndată ce s-a ales o interpretare, ecuația caracterizează mulțimea acestor curbe integrale și este adesea comod de a le utiliza direct pentru a obține anumite proprietăți a acestei mulțimi, sau pentru a studia local una dintre curbe.

ECUAȚIA CU VARIABILE SEPARABILE

O ecuație $F(x, y, y') = 0$ poate teoretic și în ipoteze largi, să fie pusă sub forma $y' = f(x, y)$ căci relația dată definește într-un anumit domeniu al planului xOy una sau mai multe funcții implicite $y'(x, y)$.

Se consideră ecuația $y' = f(x, y)$. Dacă funcția $f(x, y)$ este cu variabilele separate $f(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ atunci ecuația este cu variabile separabile și se reduce la $X(x)dx = \frac{dy}{Y(y)}$ iar soluția se obține prin două primitive

$$\int X(x)dx = \int \frac{dy}{Y(y)} + C.$$

Să se integreze ecuațiile următoare:

858. $xy\,dx = (a - x)(b - y)dy$;

859. $y' \sin 2x + \sin 2y = 0$;

860. $xy' \cos y + \sin y = 0$;

Scanned with OKEN Scanner

861. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$;

862. $xy(1 + x^2)dy - (1 + y^2)dx = 0$;

863. $\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1+y-y^2}}$; **864.** $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

865. Să se integreze ecuația $(1 + y')\cos(x + y) = yy'$ făcînd $x + y = u$.

866. Să se integreze ecuația $y' \cdot (a^2 - x^2)^2 + 4axy^2 = 0$.

Prin ce punct din plan trec o infinitate de curbe integrale? Să se arate că toate aceste curbe sînt tangente în acest punct.

867. Să se integreze ecuația $2x^2dy + (1 + 2xy - x^2y^2)dx = 0$ punînd $u = xy$.

868. Să se integreze ecuația $(x - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$ prin schimbarea de funcție $y = \sqrt{xz}$.

Să se integreze ecuațiile următoare punînd $xy = t$.

869. $xy' - y\ln(xy - 1) = 0$;

870. $(x^2y + x)dy + (xy^2 - y)dy = 0$;

871. $x^2(y' + y^2) = a(xy - 1)$;

872. Să se determine curbele integrale ale ecuației $xy'' + (1 - y'^2)y' = 0$ care este de primul ordin în raport cu $z = y'$.

873. Să se integreze ecuația

$$x^4y'^2 + 2x(x^2y - 1)y' + 4(1 - y) = 0$$

punînd $Z = yx + \frac{1}{x}$; $Z(x)$ fiind noua funcție necunoscută.

874. Să se determine curbele care au subtangenta relativă la Ox o constantă a.

875. Să se determine curbele pentru care segmentul TT' decupat pe tangenta în M de axele Ox și Oy să aibă mijlocul în M.

876. Să se determine curbele astfel ca normala în M taie axa Ox în N, punctul R definit prin $OR = NM$ să descrie parabola $y^2 = 2px$.

877. Să se determine curbele astfel ca, dacă se proiectează un arc oarecare (din primul cadran) a uneia dintre ele pe axele Ox și Oy, raportul ariilor celor două trapeze curbilinii astfel obținute să fie constant și egal cu $\frac{m}{n}$.

878. Un punct M descrie o curbă C dată trecînd prin $A(1, 0)$. Să se determine locul C_1 al unui punct M_1, asociat lui M astfel:

Aria $OPMQ$ = Aria $OP_1M_1Q_1$; (fig. 6)

Aria $AP_1M_1 = 2$ Aria APM.

CURBE CONDIȚIONATE ÎN COORDONATE POLARE

Subnormala polară $\overline{ON} = r' = \frac{dr}{d\theta}$ iar subtangenta $\overline{OT} = -\frac{r^2}{r'}$ iar $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$. (fig. 7)

879. Să se găsească curbele care taie sub un unghi constant dreptele care trec printr-un punct fix.

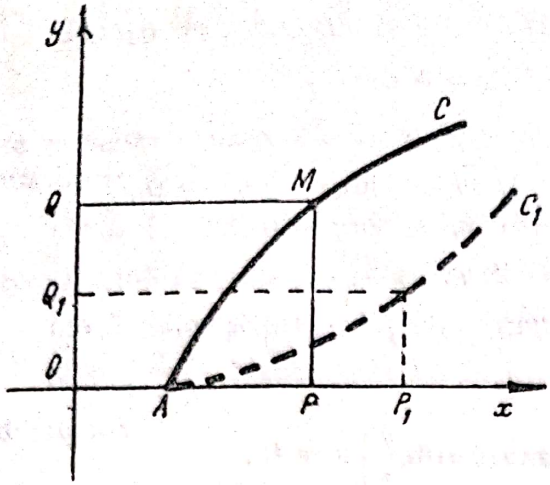

Fig. 6

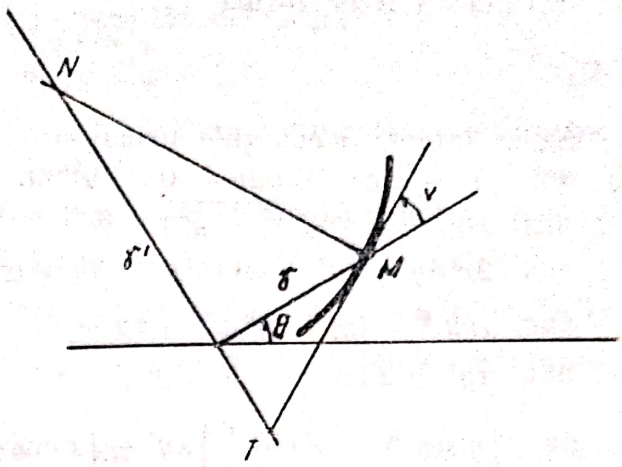

Fig. 7

880. Să se determine curbele care au subnormala polară constantă.

881. Să se determine curbele astfel că dacă H este proiecția ortogonală a originei pe tangenta în punctul M a unei astfel de curbe, mediana OI a triunghiului OMH să aibă o lungime constantă a.

Ecuații în care lipsește una din variabile $F(x, y') = 0$ sau $F(y, y') = 0$.

Să se integreze ecuațiile

882. $xy'^2 = a$; **883.** $y'^2 = \sin^2 x^k$;

884. $y'^2 = 4 \cos y \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}$; **885.** $x = \frac{1}{y'} + y'$;

886. Să se determine curbele care au porțiunea normalei cuprinsă între M și Ox o constantă a.

887. Să se determine curbele care au porțiunea de tangentă cuprinsă între un punct de contact M și axa Ox o lungime constantă a.

888. Să se determine curbele care au pătratul arcului proporțional cu y adică $s^2 = Ky$.

889. Să se determine curbele astfel ca mediatoarea lui OM taie tangenta în M în punctul T să avem $OT = a$.

Să se integreze ecuațiile:

890. $y'^3 - 3yy' + y^3 = 0$; **891.** $yy'^2 - 2ay' + y = 0$.

ECUAȚII OMOGENE ȘI REDUCTIBILE LA OMOGENE

Definiție. f fiind o aplicație a lui I în $\mathbf{R}$, orice ecuație diferențială de tipul

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se numește ecuație omogenă.

Dacă Γ este o curbă integrală, transformata lui Γ printr-o omotetie de centrul O este tot o curbă integrală.

Pentru integrare se face $y = tx$ și se obține ecuația cu variabile separate

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

Soluția va fi de forma

$$x = Ce^{\varphi(t)}$$
$$y = Cte^{\varphi(t)}$$

Să se integreze ecuațiile următoare:

889. $(y - x)dx + ydy = 0$; **893.** $(2\sqrt{xy} - x)dy + y\,dx = 0$;

894. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; **895.** $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0$;

896. $2x^3dy = (y^3 + x^2y)dx$; **897.** $y^2 = 2xyy' + \frac{y^2y'^2}{4}$;

898. $xyy'^2 - (x^2 - y^2)y' - xy = 0$; **899.** $4x^3yy' = y^4 + 4x^2y^2 - x^4$;

900. $xy' + x\cos\frac{y}{x} + x - y = 0$;

901. $\left(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right)xy' - \left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y = 0$;

902. $(x + y - 1)dx + (-x + y + 1)dy = 0$;

903. $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$;

904. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$;

905. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 9y - 20}{6x + 2y - 10}$;

906. $(ax + by + c)dx + (ay - bx + c')dy = 0$;

907. Să se determine curbele plane care au proprietatea că $\overline{OP}\cdot\overline{MN} = k\overline{OM}^2$, unde $\overline{MN}$ este segmentul normală, $\overline{OP}$ fiind distanța de la origine la tangentă în M la curbă.

908. Să se determine curbele plane care au proprietatea că dacă P este proiecția unui punct M al curbei pe Ox, iar tangenta în M taie axa Ox în T să avem relația $\overline{OP}\cdot\overline{PM} = PT^2$.

909. Să se determine curbele plane care au proprietatea că perpendiculara coborîtă din proiecția unui punct M al curbei pe Ox, pe raza vectoare a lui M să intersecteze axa Oy în același punct ca și normala în M la curbă.

910. Să se determine curbele plane C astfel ca cercul descris pe raza vectoare a unui punct M ca diametru să treacă prin mijlocul segmentului care reprezintă normala în M la curbă.

ECUAȚII LINIARE DE ORDINUL I ȘI ECUAȚII REDUCTIBILE LA LINIARE

Ecuația liniară de ordinul I. Orice ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

se numește ecuație liniară de ordinul I.

$P(x)$ și $Q(x)$ sînt două funcții numerice continui pe un interval I. Soluția ecuației (1) este dată de formula

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

Ecuația lui Bernoulli. Orice ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2}$$

se numește ecuație Bernoulli. Prin schimbarea $Z = \frac{1}{y^{n-1}}$ se reduce la o ecuație liniară.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația lui Riccati. Orice ecuație diferențială de forma

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{3}$$

se numește ecuație Riccati : $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ fiind funcții numerice continui pe un interval I.

Dacă y_1 este o soluție particulară a ecuației (3) substituția $y = y_1 - \frac{1}{z}$ transformă ecuația (3) într-o ecuație liniară de ordinul I.

Dacă y_1 și y_2 sînt soluții particulare ale ecuației (3) atunci substituția $Z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ transformă ecuația (3) într-o ecuație cu variabile separabile de forma

$$Z' = a(x)Z(y_1 - y_2).$$

Dacă y_1, y_2, y_3 sînt trei soluții particulare ale ecuației (3) atunci soluția este

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C.$$

Să se integreze ecuațiile următoare :

911. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$; **912.** $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

913. $x(1 + x^2)y' - y = x^3$; **914.** $xy' - ny = x^{n+1}\ln x$;

915. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$;

916. $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y)\cos y = 0$;

917. $y'x\varphi(x) - [\varphi(x) + x\varphi'(x)]y = \varphi^2(x)\,(1 - \ln x)$;

918. $xy' - y = \frac{x}{\ln x}$; **919.** $y' + (2 \sin x + \operatorname{ctg} x)y = 1$;

920. $xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0$;

921. $yy' \sin^2 x + y^2 \sin x \cos x = 1$;

922. $(x \sin y - 1)y' + \cos y = 0$; **923.** $y'(x + a^2 - y^2) = y$;

924. $(x^2 + 1)y' - 2hxy - r = 0$, ($r$, h, constante) ;

Cazuri particulare $h = r = 1$, $h = \frac{3}{2}$, $r = 1$;

925. Tangenta în M la curba C taie pe Ox în T.

Să se determine curba C astfel ca mijlocul lui MT să descrie parabola $y^2 = 2px$.

926. Tangenta în M la curba C taie pe Ox în T.

Să se determine curba C astfel ca $\overline{MT} = \overline{AT}$ unde $A(a, 0)$.

Să se integreze ecuațiile următoare :

927. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\ln x}{x} y^3$; **928.** $y' + \frac{2}{x} y + y^2 \ln x = 0$;

929. $y' + y \operatorname{tg} x = y^2$; **930.** $y' - (2 \sin x + \operatorname{ctg} x)y = y^2$;

931. $x(2x^2 y \ln y + 1)y' = 2y$; **932.** $(x^2y^3 + xy)y' = 1$;

933. Să se integreze ecuația $xy' = y + 3xy^3$. Să se pună ecuația curbelor integrale sub formă întreagă. Să se discute forma lor.

934. Să se integreze ecuația $xy' - y + \frac{y^3}{x^3} = 0$.

Să se construiască curba integrală trecînd prin punctul (1, 1). Să se precizeze poziția asimptotelor și tangenta în origină.

Scanned with OKEN Scanner

935. Să se determine pentru ecuația $(1 - x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$ o soluție de forma λx^n. Să se deducă toate soluțiile.

936. Să se arate că ecuația

$$y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$$

admite integrala particulară $y_1 = \cos x$. Să se deducă toate soluțiile.

Să se integreze ecuațiile următoare pentru care se caută soluții particulare de formele indicate.

937. $x^2(y' + y^2) = 2(xy - 1)$, $y_1 = \frac{a}{x}$;

938. $y' + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3y}{x} - x^4 = 0$, $y_1 = ax^3$;

939. $(1 + x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, $y_1 = ax^r$;

940. $(1 + x^2)y' = 4xy^2 + 2x(4x^2 + 3)y + 4x^3(1 + x^2)$, $y_1 = ax^2 + bx + c$;

941. Să se integreze ecuația $y' + y^2 - \frac{k^2}{x^4} = 0$ căutînd două soluții particulare de forma

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}.$$

942. Să se caute pentru ecuația 935 soluții particulare de forma $y_1 = ax + b$ și să se scrie soluția generală fără cuadraturi.

943. Se consideră ecuația Riccati

$$y' = ay^2 + 2by + au^2$$

a, b, u fiind trei funcții uniform continue de x.

1) Ce condiție trebuie să satisfacă funcțiile a, b, u pentru ca ecuația să admită două soluții particulare y_1 și y_2 legate prin relația $y_2 = s^2y_1$, s fiind o constantă.

2) În cazul $s = 2$, $u = \frac{1}{2}$ și $a = \frac{8}{3(x-1)^2}$ să se determine b (de semn contrar cu a) astfel încît condiția de la 1) să fie satisfăcută și să se determine explicit integrala generală a ecuației date.

ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI FORME DIFERENȚIALE. FACTOR INTEGRANT

Fie ecuația

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

Dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ atunci membrul unu al ecuației (1) este o diferențială totală a unei funcții $U(x, y)$. Curbele integrale avînd ecuația $U(x, y) = C$. Pentru determinarea funcției $U(x, y)$ avem

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = U(x, y) - U(x_0y_0). \tag{2}$$

Dacă $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ se caută un factor $\lambda(x, y)$ astfel ca $\lambda P(x, y)dx + \lambda Q(x, y)dy$ să fie diferențială totală a unei funcții: λ este dat de ecuația

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{3}$$

Să se integreze ecuațiile următoare:

944. $\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$;

945. $\left(-\frac{1}{x} + y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$;

946. $x(y^2+1)dx + \left(x^2y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy = 0$;

947. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$;

948. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)ydy = 0$;

949. Să se integreze ecuația

$$(x^2y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0,$$

căutînd un factor integrant de forma $\lambda(x)$.

950. Fie ecuația $(y + 2y^3)dx + (4xy^2 - 2)dy = 0$;

Să se arate că făcînd $y^2 = u$ primul membru al ecuației obținute se poate pune sub forma unei diferențiale totale. Să se deducă integrala ecuației date.

951. Fie forma diferențială $\delta\omega = Pdx + Qdy$.

Ce condiție trebuie să satisfacă P și Q pentru ca să existe un factor integrant funcție numai de x. Aplicație:

Să se rezolve ecuația

$$(3x^2 - y^2 + 3)dx + 2xydy = 0$$

952. Presupunem în ecuația (1) că $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt funcții omogene de același grad m, să se arate că $\lambda(x, y) = \frac{1}{xP + yQ}$ este un factor integrant (presupunînd $xP + yQ$ diferită de zero) al ecuației $Pdx + Qdy = 0$.

953. Să se integreze ecuația $(x - 2y)dx + ydy = 0$ căutînd un factor integrant de forma $\varphi(y - x)$.

Să se integreze ecuațiile următoare căutînd un factor integrant funcție de xy.

954. $(y + x^3y^2)dx + (x + x^2y^3)dy = 0$.

955. $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$.

956. 1) Să se determine soluția ecuației

$$y'(y^2 - x^2 - 2xy) + y^2 - x^2 + 2xy = 0$$

2) Să se arate că este posibil de a determina un factor integrant $\lambda(u)$ unde $u = x^2 + y^2$.

Să se integreze ecuația obținută și să se compare cu rezultatul de la 1).

957. Să se aplice rezultatul de la ecuația 952 la

$$(xy + y\sqrt{x^2+y^2})dx + (y^2 - x\sqrt{x^2+y^2})dy = 0$$

Să se construiască curba integrală care admite dreapta $y = 2a$ ca asimptotă.

Scanned with OKEN Scanner

ECUAȚIILE LUI LAGRANGE ȘI CLAIRAUT

Orice ecuație diferențială de forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{1}$$

adică liniară în raport cu x și y se numește ecuația Lagrange.
Dacă $\varphi(y') = y'$ se obține ecuația lui Clairaut

$$y = xy' + \psi(y') \tag{2}$$

Pentru integrarea ecuației (1) se pune $y' = p$ se derivează ecuația și prin schimbarea rolului variabilelor se obține o ecuație liniară în x și x'.

Soluția ecuației (1) este de forma

$$x = x(p, c)$$
$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

Integrala generală a ecuației (2) este

$$y = Cx + \psi(C)$$

iar integrala singulară este

$$x = -\psi'(p)$$
$$y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

958. Să se arate că orice tangentă la o curbă integrală a unei ecuații Clairaut constituie, de asemenea, o curbă integrală.

Să se integreze ecuațiile următoare

959. $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$;

960. $y = x(1 + y') + y'^2$;

961. $y = xy' + y'^2$;

962. $xy'^2 + (y - 3x)y' + y = 0$;

963. $y = xy' + \cos y'$;

964. $y - xy' = \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$;

Să se afle soluțiile singulare ale ecuațiilor

965. $yy' = xy'^2 + a$;

966. $(y - xy')^2 = 4y'$;

967. $y = xy' + ay'(1 - y')$;

968. $(x - a)y'^2 + (x - y)y' - y = 0$

969. Să se determine curba (distinctă de o dreaptă) astfel că dacă T și T' sînt intersecțiile tangentei cu Ox și Oy, să avem una din condițiile următoare:

a) $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = a^2$

b) $\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = a^2$

c) $\overline{OT} + \overline{OT'} = a$

d) $\overline{OT'} \cdot y' = a$

TRAIECTORII ORTOGONALE ȘI TRAIECTORII SUB UNGHIUL α

Cazul coordonatelor carteziene. Un fascicul de curbe $f(x, y, \lambda) = 0$ admit în general un fascicul de traiectorii ortogonale, a căror ecuație diferențială se obține schimbînd y' în $-\frac{1}{y'}$, în ecuația diferențială a fasciculului dat.

Să se afle traiectoriile ortogonale ale fasciculului de curbe.

970. $x^2 - y^2 = \lambda$; **971.** $y^2 = \frac{x^3}{c - x}$;

972. $3x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$; **973.** $xy = c(x^2 + y^2)^2$;

974. $y^2 = 2px + \lambda$; **975.** $\lambda y = x^2 - a^2$.

976. Să se determine traiectoriile ortogonale ale curbelor integrale (C) de ecuație diferențială

$$x + yy' = f(y')$$

Ce proprietăți ale curbelor (C) rezultă ?

977. Să se arate că orice ecuație diferențială $f\left(x, y, y' - \frac{1}{y'}\right) = 0$, unde $f(x, y, z)$ înseamnă o funcție de trei variabile, reprezintă două sisteme de curbe ortogonale.

Să se formeze ecuația diferențială a conicelor $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$ și să se verifice că condiția precedentă este satisfăcută. Explicație.

Cazul coordonatelor polare. Se formează ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale schimbînd $r' = \frac{dr}{d\theta}$ în $-\frac{r^2}{r'}$ în ecuația diferențială a fasciculului dat.

978. Să se determine traiectoriile ortogonale ale cardioidelor a) $r = \lambda(1 + \cos\theta)$

b) ale curbelor $r^2 = \lambda \cos\theta$;

c) ale cisoidelor $x(x^2 + y^2) - \lambda y^2 = 0$;

d) ale spiralelor $r = \lambda e^{m\theta}$;

e) ale lemniscatelor $r^2 = \lambda \sin 2\theta$;

f) ale curbelor $\left(r^2 - \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta = \lambda$.

Traiectorii sub un unghi α. Presupune coordonate carteziene. Dacă y' și y_1' sînt pantele curbelor din fiecare familie care se taie în M.

Avem

$$\frac{y_1' - y'}{1 + y_1' \cdot y'} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{de unde} \quad y' = \frac{y_1' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y_1' \operatorname{tg}\alpha}$$

Se deduce regula următoare : se formează ecuația diferențială a curbelor căutate schimbînd y' în $\frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y' \operatorname{tg}\alpha}$ în ecuația diferențială a curbelor date.

979. Să se determine traiectoriile sub unghiul α ale hiperbolelor echilatere asimptote axelor OX și OY.

Să se integreze ecuațiile următoare :

980. $xy^2(xy' + y) = a^2$; **981.** $(3x^2y + 2x^3)dx + y^3dy = 0$;

982. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$;

983. $xy'\operatorname{ch}\frac{y}{x} + 2x\operatorname{sh}\frac{y}{x} - y\operatorname{ch}\frac{y}{x} = 0$;

Scanned with OKEN Scanner

984. $(xy' - y)\cos^2 \frac{y}{x} + x = 0$;

985. $(\ln y + 2x - 1)y' - 2y = 0$;

986. $x^2yy' + (1 + x)(1 + y^2 + y^4) = 0$;

987. $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

988. $(x^2y - 1)y' - (xy^2 - 1) = 0$;

989. $(y - x^2)y' + 4xy = 0$;

990. $xy' - x(y - x)\sqrt{y^2 - x^2} - y = 0$;

991. $xy'^2 = y$;

992. $xy' \ln x \ln y + \cos y(1 - x \cos y) = 0$;

993. $y' \cos y - \cos x \sin^2 y - \sin y = 0$;

994. $x(x^2 + 2y^3)y' = 2y^4$;

995. $(2xy^3 + y)y' + 2y^2 - 4 = 0$;

996. $(y^2 + 4 \sin x)y' = \cos x$;

997. Să se integreze ecuația $2yy' = x(y'^2 + 1) + y'^4 - 3y'^2$. Se cere curba care trece prin $A(0, -1)$ cu $y'(0, -1) = 0$.

998. Să se integreze ecuația $2y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + \frac{y'^3}{3} - y' + 1$ și să se găsească curba care trece prin origine.

999. Să se integreze ecuația $(x^2 - y^4)y' - xy = 0$ luînd ca variabile pe y și $\frac{x}{y}$. Să se arate că integralele sînt curbe unicursale și nu au puncte la infinit.

Să se integreze ecuațiile:

1000. $\int_0^x xydx = x^2 + y$. Se cere curba care trece prin $A(a, a^2)$.

1001. $2\int_0^x y\sqrt{1 + y'^2}dx = 2x + y^2$;

1002. $x\int_0^x ydx = (x + 1)\int_0^x xydx$;

1003. Să se integreze ecuația $y'' + Py' + yP' = 0$ unde $P(x)$ este o funcție dată.

1004. Să se integreze ecuația $y' = \frac{y(x + 1)}{x^3} - \frac{2y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ punînd $y = xe^z$.

1005. Să se integreze ecuația $y'(x^2 - 4) + xy = 2$.

Această ecuație are o integrală continuă pentru $x = 2$? Are o integrală continuă oricare ar fi x?

1006. Să se determine legea spațiu-timp a unui corp de masă m, care face o mișcare rectilinie, astfel ca energia cinetică $\frac{1}{2}mv^2$ să fie proporțională cu puterea a n^a a drumului s.

1007. Un punct de masă m se mișcă într-un plan vertical, astfel încît componenta verticală a vitezei să fie o constantă a. Se cere ecuația curbei descrise.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII SINGULARE ALE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL I

Să se determine integralele singulare ale următoarelor ecuații:

1008. $xy^2y'^2 + y^3y' + a^2x = 0$;

1009. $xy'^2 - 2yy' + x + 2y = 0$;

1010. $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y'^2 - 1 = 0$;

1011. $(a - x)y'^2 + (y - x)y' + x = 0$;

1012. $(1 + y'^2)y^2 - 2a(x + yy') = 0$;

1013. $y(3 - 4y)^2 \cdot y'^2 - 4(1 - y) = 0$.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL II REDUCTIBILE LA ORDINUL I

1. **Ecuații care nu conțin pe y, de forma $F(x, y', y'') = 0$ se reduc la ordinul I făcînd $y' = p$, $y'' = p'$.**

Să se integreze ecuațiile:

1014. $xy'' - y' = 0$;

1015. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

1016. $y''^2 + 4y' = 4xy'$;

1017. $1 + y'^2 = xy' \cdot y''$;

1018. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay'' \sqrt{1 + y'^2}$.

Să se integreze ecuațiile următoare ținînd seama de condițiile inițiale indicate.

1019. $y''(1 + x^2) = 2xy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

1020. $xy'' + xy'^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

1021. $(1 + x^2)y'' + xy' - 2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2. **Ecuații care nu conțin pe x, de forma $F(y, y', y'') = 0$.** Se face $y' = u$, $y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$ și ecuația devine de ordinul I în u și y.

Să se integreze ecuațiile următoare:

1022. $2yy'' = 1 + y'^2$;

1023. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$;

1024. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

1025. $yy'' - y'^2 - y^2 \ln y = 0$;

1026. $(y^2 + 1)y'' - (2y - 1)y'^2 = 0$.

1027. Să se determine curbele plane care au raza de curbură constantă.

1028. Să se determine curbele plane astfel ca proiecția razei de curbură pe o dreaptă fixă să fie constantă.

1029. Să se determine curbele plane care au raza de curbură proporțională cu cubul normalei.

3. **Ecuațiile omogene în raport cu y și cu derivatele lui y se integrează făcînd $y = e^{\int z dx}$**

Să se integreze ecuațiile:

1030. $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0$;

1031. $x^2yy'' = (y - xy')^2$;

1032. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$;

1033. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$;

1034. $x^2yy'' + x^2y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$.

CAPITOLUL XV

ECUAŢII LINIARE DE ORDINUL n

ECUAŢII OMOGENE

Se numeşte *ecuaţie liniară de ordinul n omogenă* orice ecuaţie de forma :

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \tag{1}$$

coeficienţii $f_i(x)$ fiind funcţii continui. Dacă $y_1, y_2, \ldots y_n$ sînt n funcţii de x care satisfac ecuaţia (1) a căror wronskian $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$, adică sînt liniar independente, atunci soluţia generală a ecuaţiei (1) este

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \tag{2}$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ formează un spaţiu vectorial de dimensiune n, ele pot fi luate ca bază a spaţiului soluţiilor.

ECUAŢII NEOMOGENE

Sînt de forma

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = f(x) \tag{3}$$

şi soluţia generală este de forma $y = y_0 + Y$ unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogene iar Y o soluţie particulară a ecuaţiei (3). Dacă se cunoaşte (2) atunci soluţia generală a ecuaţiei (3) se poate căuta sub forma

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n$$

unde funcţiile $c_i(x)$ sînt date de sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0\\
&c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0\\
&c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}$$

Sistemul are soluţie unică întrucît wronskianul

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots y_n \\ y_1' & y_2' \ldots y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

ECUAȚIA DE ORDINUL DOI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Pentru ecuația $ay'' + by' + cy = 0$ unde a, b, c sînt constante, se caută soluție de forma e^{rx}.

Numărul r este rădăcină a ecuației caracteristice

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{4}$$

de unde, în orice caz, două soluții independente formînd o bază în spațiul vectorial al soluțiilor, se obțin.

1) $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ (dacă r_1 și r_2 sînt rădăcini reale ale lui (4)
2) $y = (c_1x + c_2)e^{r_1x}$ (dacă r_1 este rădăcină dublă a lui (4)
3) $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$ (dacă $\alpha \pm i\beta$ sînt rădăcini complexe ale lui (4)

ECUAȚIA DE ORDINUL TREI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Pentru ecuația $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ se caută soluții de forma e^{rx}. Ecuația caracteristică

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0$$

are trei rădăcini.

Dacă y_1, y_2, y_3 sînt trei soluții independente ele constituie o bază pentru spațiul vectorial cu trei dimensiuni.

Avem patru cazuri:

1) trei rădăcini reale r_1, r_2, r_3:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + c_3e^{r_3x}$$

2) o rădăcină reală r_1; două complexe $\alpha + i\beta$;

$$y = c_1e^{r_1x} + e^{\alpha x}(c_2 \cos \beta x + c_3 \sin \beta x)$$

3) o rădăcină dublă r_1, una simplă r_2:

$$y = (c_1x + c_2)e^{r_1x} + c_3e^{r_2x}$$

4) o rădăcină triplă r_1:

$$y = (c_1x^2 + c_2x + c_3)e^{r_1x}.$$

Ecuații omogene

1035. Să se integreze $y'' + 2y' - 3y = 0$. Să se determine integrala care ia valoarea 1 pentru $x = 0$ și 0 pentru $x = \ln 2$.

1036. Fie ecuația $ay'' + by' + cy = 0$. Să se arate că dacă ecuația caracteristică are rădăcini reale, există totdeauna o soluție și numai una luînd respectiv valorile y_1 și y_2 pentru valorile x_1 și x_2 ale variabilei.

1037. Aceeași chestiune, presupunînd că ecuația caracteristică are rădăcini complexe.

1038. Să se determine toate curbele integrale ale ecuației $y'' - 3y' + 2y = 0$ care sînt tangente la curba $y = e^{3x}$.

1039. Fie y_1 și y_2 două soluții ale ecuației diferențiale

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

formînd o bază oarecare a spațiului vectorial (E) de dimensiune 2, constituit de ansamblul soluțiilor acestei ecuații; p și q două constante reale; $y(t)$ o funcție de variabilă reală t.

1) Amintim că toate soluțiile ecuației (1) sînt de clasă C^n; și că derivata unei soluții este de asemenea soluție.

2) Fie $y = ay_1 + by_2$ și $y' = a_1y_1 + b_1y_2$ expresiile lui y și y'; vectorului $V = (a, b)$ din $\mathbf{R}^2$ facem să corespundă $V' = (a_1, b_1)$. Să se arate că aplicația lui $\mathbf{R}^2$ în $\mathbf{R}^2$ care lui V face să corespundă V' este aplicație liniară. Să se arate că nu există constanta k astfel ca, oricare ar fi V să avem $V_1 = kV$.

3) Să se arate că matricea A a aplicației liniare precedente verifică ecuația

$$A^2 + pA + qI = 0$$

și să se deducă existența a două numere reale sau complexe r_1 și r_2 astfel ca

$$(A - r_1I)(A - r_2I) = 0.$$

Să se arate că cele două matrici $A - r_1I$ și $A - r_2I$ sînt singulare și să se deducă că determinantul matricei $A - rI$ este $r^2 + pr + q$. Se presupune $r_1 \neq r_2$. Reciproc dacă se cunosc două numere distincte λ și μ astfel că $(A - \lambda I)(A - \mu I) = 0$ atunci $\lambda = r_1$; $\mu = r_2$.

1040. $y''' - y = 0$;

1041. $y''' - y'' - y' + y = 0$;

1042. $y^{IV} - 16y = 0$;

1043. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$;

1044. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$;

1045. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

1046. Să se integreze ecuația $y^{IV} - a^2y'' = 0$ și să se determine curba care are în vecinătatea originei în traseu asemănător cu parabola cubică $y = x^3$.

Ecuații neomogene

Să se integreze ecuațiile:

1047. $3y'' - 2y' - y = x^2$;

1048. $y'' + 2y' + y = 8e^x$;

1049. $y'' - y' - 6y = \frac{1}{2}e^{-2x}$;

1050. $y'' - 2y' + 5y = 10 \cos x$;

1051. $2y'' - y' - y = 3 \cos 2x - \sin 2x$;

1052. $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$;

1053. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \sin 3x$;

1054. $y''' + y = x$;

1055. $y'' + y = \cos^2 x$; Soluția particulară astfel ca $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

1056. $y'' + 2y' - 5y = xe^{-x} \cos 2x$;

1057. $y'' - 2y' + 5y = 7e^x \cos 2x + xe^{2x}$;

1058. $y^{IV} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4 \cos x$;

1059. Fiind dată ecuația $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}P(x)$ unde a și b sînt constante iar $P(x)$ un polinom de gradul n. Să se demonstreze proprietățile următoare.

1) Dacă α nu este rădăcină a ecuației caracteristice $r^2 + ar + b = 0$ se poate găsi o integrală particulară de forma $e^{\alpha x}Q(x)$ unde $Q(x)$ este un polinom de gradul n.

2) Dacă α este rădăcina simplă a ecuației caracteristice se poate găsi o integrală particulară de forma $xe^{\alpha x}Q(x)$, $Q(x)$ fiind un polinom de gradul n.

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă α este rădăcină dublă a ecuației catacteristice se poate găsi o integrală particulară de forma $x^2e^{\alpha x}Q(x)$, $Q(x)$ fiind un polinom de gradul n.

4) Dacă se face $y = ze^{\alpha x}$ atunci integrala particulară se reduce la un polinom.

Să se integreze ecuațiile:

1060. $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$;

1061. $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$;

1062. $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 2e^{\frac{x}{3}}(6x - 1)$

1063. Să se formeze ecuația admițînd $(r - 3)^2$ ca ecuație caracteristică și $(3x + 1)e^x$ ca soluție particulară.

1064. Să se integreze $y'' - 4y = 4e^{-2x}$. Să se determine soluția particulară a cărei curbă reprezentativă admite o asimptotă paralelă la Ox și care în punctul său de intersecție cu Oy admite o tangentă paralelă la prima bisectoare.

1065. Să se integreze ecuația $y'' + 2\lambda y' + 2\lambda^2 y = \lambda e^{-\lambda x}\cos \lambda x$, unde λ este o constantă. Să se determine soluția $y(x, \lambda)$ care se anulează pentru $x = 0$ și care pentru $x = 1$ este 1. Să se arate că dacă $\lambda \to 0$ funcția $y(x, \lambda)$ astfel obținută are o limită pentru orice valoare a lui x.

1066. Să se integreze ecuația $y^{IV} - y = 0$ căutînd o ecuație de ordinul doi pentru $u = y + y''$. Să se determine printre curbele integrale acelea care admit Oy ca axă de simetrie și care trec prin $P(0, 3)$, centrul cercului osculator în P fiind punctul $(0, 2)$.

1067. Să se integreze ecuația $y^V + y'' = x$ și să se determine curbele integrale care admit pentru $x = +\infty$ drept curbă asimptotă parabola cubică $y = \frac{1}{6}x^3$.

Să se integreze ecuațiile:

1068. $(1 + x)y'' - (6 + 5x)y' + 2(4 + 3x)y = 0$;

1069. $y''' \sin x - y'' \cos x + y' \sin x - y \cos x = 0$

1070. În ecuația $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ se pune $x = f(t)$. Ce relație trebuie să verifice f dacă vrem ca ecuația în $y(t)$ obținută să nu conțină termen în y'_t? caz particular:

$x^{2n}y'' + nx^{2n-1}\cdot y' + my = 0$, m și n două constante.

1071. Fiind dată ecuația $y'' + ay' + by = P(x)\cos \alpha x + P_1(x) \sin \alpha x$, a și b constante iar $P(x)$ și $P_1(x)$ polinoame.

Dacă α nu este rădăcină a ecuației caracteristice se poate găsi o integrală particulară de forma

$$Q(x)\cos \alpha x + Q_1(x)\sin \alpha x,$$

$Q(x)$ și $Q_1(x)$ pot fi polinoame ale căror grade sînt cel mult egale cu cel mai mare grad al polinoamelor $P(x)$ și $P_1(x)$. Dacă α este rădăcină a ecuației caracteristice se poate găsi o soluție particulară de forma $x[Q(x)\cos \alpha x + Q_1(x)\sin \alpha x]$.

Să se integreze:

1072. $y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12)\cos 3x + (11x^2 - 5x - 5)\sin 3x$;

1073. $y'' + 4y = x \sin 2x$;

1074. $y^{IV} - y = x\,e^x + \cos x$.

1075. Se consideră funcția $V = f(r)$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Să se determine funcția $f(r)$ astfel ca

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = m^2 V.$$

METODA VARIAȚIEI CONSTANTELOR

Să se integreze ecuațiile :

1076. $y'' + y = \operatorname{tg} x$;

1077. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$;

1078. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$;

1079. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$;

1080. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$;

1081. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$;

1082. $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$;

1083. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$.

ECUAȚIA LUI EULER

Să se integreze ecuațiile :

1084. $x^2y'' - 6y = 0$;

1085. $x^2y'' + xy' - y = 0$;

1086. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$;

1087. $x^3y''' + xy' - y = 0$;

1088. $x^2y'' + xy' + y = x$;

1089. $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$;

1090. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$;

1091. $x^3y'' - x^2y' + xy = \ln^3 x$;

1092. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x \sin \ln x$;

1093. $(1 + x)^3y'' + 3(1 + x)^2y' + (1 + x)y = 6 \ln (1 + x)$;

1094. Se consideră curba $\bar{r} = t\bar{i} + f(t)\bar{j} + t^2\bar{k}$.

— Să se determine $f(t)$ astfel ca planul osculator în punctul curent M al curbei să taie axa Oz în N de aceiași cotă t^2 ca și M.

1095. Se dă curba $y = f(x)$, $z = \frac{a^2}{x} - f(x)$.

Să se determine $f(x)$ astfel ca planul osculator în punct curent M să treacă prin O.

ECUAȚII DIFERENȚIALE CU COEFICIENȚI VARIABILI. PROBLEME DIFERITE

Să se integreze ecuațiile următoare, cunoscînd cîte o integrală particulară.

1096. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$;

1097. $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$, $y_1 = x^2$;

1098. $(2x + 1)y'' + 2(2x - 1)y' - 8y = 0$, y_1 este de forma e^{mx}.

1099. Să se integreze ecuația $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$ făcînd $x = \frac{1}{4}t^2$.

Scanned with OKEN Scanner

1100. Să se integreze ecuația $(1 - x^2)y'' - xy' + k^2y = 0$ făcînd $x = \sin t$.

1101. Se consideră ecuația $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = x$.

1) Se face $x = \varphi(t)$, și se cere $\varphi(t)$ astfel ca ecuația să nu conțină pe y'_t.

2) Luînd $x = \operatorname{tg} t$ să se integreze ecuația transformată.

1102. Se consideră ecuația diferențială liniară :

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0 \tag{1}$$

unde $a(x)$, $b(x)$ și $c(x)$ sînt funcții date continui de variabila x și diferite de 0.

Se știe că spațiul vectorial al soluțiilor ecuației (1) are dimensiunea 2.

Operatorului $\frac{d}{dx}$ îi asociem matricea $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ unde apriori α, β, γ, δ sînt funcții de x.

Să se determine matricea N asociată operatorului $\frac{d^2}{dx^2}$, se va explicita N în funcție de M și de derivata acestei matrice în raport cu x. Să se găsească ecuația matricială care reprezintă ecuația (1).

2) Se presupune că α, β, γ și δ sînt constante ; să se găsească relațiile la care trebuie să satisfacă funcțiile $a(x)$, $b(x)$ și $c(x)$ pentru ca să fie așa. Să se examineze diferitele cazuri posibile.

3) Se consideră ecuația diferențială liniară

$$(x^2 + x + 1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2(2x + 1)y = 0. \tag{2}$$

Să se verifice că se pot da pentru α, β, γ și δ valori constante. Să se arate că se poate obține atunci o soluție particulară $y_1(x)$ a ecuației 2) și să se precizeze forma sa.

Făcînd schimbarea $y(x) = y_1(x)\, z(x)$ să se determine $z(x)$ și să se deducă soluția generală a ecuației (2).

APLICAȚIA SERIILOR ÎNTREGI LA ECUAȚII DIFERENȚIALE

Nu există o metodă generală pentru rezolvarea unei ecuații liniare de ordin doi. Funcțiile clasice și combinațiile lor sînt în general insuficiente pentru definirea mulțimii soluțiilor.

Această dificultate justifică căutarea directă a soluțiilor sub formă de serii întregi, cu alte cuvinte de a căuta soluțiile analitice în origină. Chiar dacă ecuația nu admite o soluție analitică pentru $x = 0$, seriile de puteri pot încă fi utilizate.

ECUAȚIA LINIARĂ DE PRIMUL ORDIN

Rezolvarea clasică se efectuează cu ajutorul primitivelor. Căutarea soluției sub formă de serie întreagă este adesea utilă.

a) Dacă primitiva nu se poate exprima prin funcții cunoscute, folosirea unei desfășurări este adesea posibilă.

Scanned with OKEN Scanner

b) O serie întreagă poate defini o soluție analitică a cărei expresie cu ajutorul simbolelor funcționale clasice este diferită după porțiunea considerată a domeniului de convergență.

c) Studiul este independent de metoda clasică utilizată pentru ecuațiile de primul ordin.

Ele pot fi extinse la ecuații de ordinul doi sau mai mare.

Determinarea coeficienților unei serii, soluție

Fie ecuația

$$P(x)y' + Q(x)y = S(x) \qquad (1)$$

în care presupunem pentru simplificare că P și Q sînt polinoame, $S(x)$ poate fi o serie întreagă.

Dacă se înlocuiește y printr-o serie $\sum_0^\infty a_n x^n$, primul membru devine o serie căreia trebuie să-i determinăm termenul general.

Se egalează coeficienții de o parte și de alta obținînd un sistem de o infinitate de ecuații cu o infinitate de necunoscute.

Determinarea coeficienților în general poate fi dificilă. În general se obține o relație de forma $a_{n+1} = k_n a_n$ (k_n cunoscut).

Seria fiind determinată urmează determinarea razei de convergență.

1103. Fie $y_1(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Să se formeze ecuația diferențială liniară de primul ordin verificată de y_1 și să se deducă dezvoltarea în serie întreagă a funcției y_1, apoi a funcției $z(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

1104. Să se arate că există a funcție y_1, și numai una, desfășurabilă în serie întreagă satisfăcînd ecuația

$$2xy' + y = 3x \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Pentru ce valori ale lui x această soluție este acceptabilă ? Ce ecuație verifică y_1 pentru alte valori ale lui x ?

Să se integreze ecuația și să se regăsească astfel soluția y_1.

1105. Să se integreze ecuația $xy' + (p_0 + p_1 x)y = 0$ și să se deducă cum trebuie ales p_0 pentru ca ecuația să admită ca soluție o serie întreagă.

APLICAȚIILE SERIILOR LA ECUAȚII LINIARE DE ORDINUL DOI

Ecuație liniară și omogenă. Fie ecuația

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0.$$

În cazurile studiate aici P, Q și R sînt polinoame.

1106. Să se determine o serie întreagă soluție a ecuației

$$y'' - xy = 0.$$

Care este domeniul de convergență ? Se obțin astfel toate soluțiile ?

1107. Să se determine soluțiile ecuației

$$x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$$

desfășurabile în serie întreagă de x.

Să se studieze convergența : să se calculeze sumele lor.

Scanned with OKEN Scanner

1108. Fie ecuația $(2x^2 - 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Să se determine soluțiile y_1 astfel ca

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 1 \text{ și } y_2 \text{ astfel ca}$$

$$y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Ecuația neomogenă

1109. Să se arate că o singură soluție a ecuației $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ admite o desfășurare în serie întreagă. Care este raza de convergență și suma acestei serii ? Să se caute o soluție a ecuației de forma $y = kx^n$ și să se deducă toate soluțiile.

PRIMELE NOȚIUNI ASUPRA ECUAȚIEI LUI BESSEL

Ecuația lui Bessel de ordinul h este

$$(1) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right)y = 0$$

Funcțiile lui Bessel sînt soluțiile particulare obținute prin desfășurare în serie întreagă, sau în serie de puteri și depind de parametrul h.

Această ecuație joacă un rol important într-un mare număr de fenomene fizice ; propagarea căldurii, vibrații (mecanice sau electromagnetice).

Primul membru se introduce în expresia laplacianului în coordonate cilindrice.

Ecuația lui Bessel de ordinul zero. Pentru $h = 0$, ecuația (1) devine

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0$$

1110. Să se arate că (E) are pe $\mathbf{R}$ o infinitate de soluții desfășurabile în serie întreagă. Una dintre ele J_0 este dată prin

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

1111. Să se arate că (E) admite pe R^+ o soluție H de forma $H(x) J_0(x) = \ln x + \varphi(x)$ unde $\varphi(x)$ este suma unei serii întregi nulă pentru $x = 0$.

Se pune $\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p x^{2p}$ și se caută c_p sub forma $c_p = \frac{(-1)^{p+1}}{(p!)^2} \cdot \frac{S_p}{2^{2p}}$. Să se determine S_p. Care este raza de convergență a seriei obținute ?

1112. Să se determine valoarea $h(x)$ a wronskianului $h = W[J_0, H]$. Să se deducă mulțimea soluțiilor lui (E) pe $\mathbf{R}^+$. Să se arate că orice soluție f a lui (E) valabilă pe $\mathbf{R}$ este de forma $f = \lambda J_0$ (λ constantă).

1113. Să se determine o serie întreagă

$$S(x) = 1 + a_1x_1 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

verificînd ecuația diferențială

$$xy'' + y' - y = 0$$

Cum se deduce funcția S din J_0 ?

Scanned with OKEN Scanner

1114. Să se formeze ecuația diferențială verificată de funcția $y(x) = J_0(kx)$, unde k este o constantă.

1115. 1) Să se arate că funcția K definită prin $K(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)d\theta$ este de două ori derivabilă și verifică ecuația lui Bessel de ordinul zero. Să se deducă că $K = J_0$.

2) Să se regăsească acest rezultat căutînd direct desfășurarea lui $K(x)$ în serie întreagă.

3) Să se deducă că pentru $x > 0$ se poate scrie

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\cos u\, du}{\sqrt{x^2-u^2}}.$$

1116. Fie ecuația Bessel de ordinul h,

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Se pune $y = x^h Y$. Să se formeze ecuația (E) verificată de Y. Să se determine o serie întreagă soluție a lui (E). Să se arate că dacă se alege pentru primul coeficient $a_0 = \frac{1}{2^h\Gamma(h+1)}$ toți coeficienții se exprimă simplu.

Să se studieze convergența seriei. Să se dea expresia funcției Bessel J_h; caz particular.

$$h = n, \text{ întreg.}$$

1117. Să se dea expresia lui J_1 ($n = 1$, în soluția problemei precedente).

Să se demonstreze relația obținută utilizînd ecuațiile diferențiale și condițiile pentru $x = 0$ $J_1'(0) = \frac{1}{2}$ după alegerea lui a_0 în exercițiul precedent.

1118. Se limitează la valori pozitive ale lui x.

Fie α și β două rădăcini consecutive ($\alpha < \beta$) ale funcției J_h. (Se admite existența.) Să se arate că pentru aceste valori J_h' nu este nul.

1119. Laplacianul ΔV al unui cîmp scalar $V(r, \theta, z)$ în coordonate cilindrice (r, θ, z) este dat de

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

1) Presupunem $V(r, \theta, z) = V_1(r, \theta)e^{kz}$. Să se formeze ecuația verificată de V_1, dacă V este o funcție armonică. Să se determine V_1 dacă presupunem că nu depinde de θ și în plus definită în tot spațiul.

2) Admitem că $V_1(r, \theta) = f(r)\cdot g(\theta)$. Să se formeze ecuațiile diferențiale verificate de f și g. Aceste ecuații depind de o constantă α. Să se precizeze α astfel ca g să admită o singură valoare în tot spațiul. Să se deducă funcțiile armonice de forma precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XVI

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

Să se integreze următoarele sisteme folosind metoda combinaţiilor integrabile :

1120. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}$;

1121. $\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{z}$;

1122. $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$;

1123. $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$;

1124. $\frac{dx}{bz-cy} = \frac{dy}{cx-az} = \frac{dz}{ay-bx}$;

1125. $\frac{dx}{x(cz-by)} = \frac{dy}{y(ax-cz)} = \frac{dz}{z(by-ax)}$;

1126. $\frac{dx}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{dy}{(y-x)(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z^2}$;

1127. $\frac{dx}{x^2+y^2+2yz} = \frac{dy}{-(x^2+y^2+2xz)} = \frac{dz}{2z(x-y)}$;

1128. $\frac{dx}{x-\alpha y} = \frac{dy}{y+\alpha} = \frac{dz}{z}$;

1129. $\frac{dx}{-x+2yz} = \frac{dy}{-y-2xy} = \frac{dz}{1}$;

1130. $\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{dy}{-x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$;

1131. $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$;

1132. $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$;

1133. $\frac{dx}{x^3+3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}$;

1134. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2+z^2)} = \frac{dz}{x(x^2+y^2)}$;

1135. $\frac{dx}{-xy^2+x+y} = \frac{dy}{x^2y-x-y} = \frac{dz}{z(y^2-x^2)}$;

1136. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{y(z^2-x^2)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$;

1137. $\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-xz} = \frac{dz}{z^2-xy}$.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind metoda eliminării, să se integreze sistemele următoare:

1138. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 4x - 3y = 0 \end{cases}$;

1139. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$ pentru $t = 0,\ x = y = 1$;

1140. $\frac{dx}{dt} = y + z,\quad \frac{dy}{dt} = z + x,\quad \frac{dz}{dt} = x + y$;

1141. $\frac{dx}{dt} = 2x + y - z,\quad \frac{dy}{dt} = x + 2y - z,\quad \frac{dz}{dt} = 3x - 3y - z$;

1142. $\frac{dx}{dt} = -x + y + z,\quad \frac{dy}{dt} = x - y + z,\quad \frac{dz}{dt} = x + y + z$;

1143. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 16y - 6x = 48\cos 2t \\ \frac{dy}{dt} + 2y - x = 6\cos 2t - 2\sin 2t \end{cases}$;

1144. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 2y = \cos t + \sin t + e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} - 2x + y = \sin t - \cos t \end{cases}$

Să se găsească soluția care se reduce pentru $t = 0$ la $x = 1$ și $y = 0$.

1145. $\frac{dx}{dt} - x + 2y = 0,\quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 2t - \cos 2t$;

1146. $\frac{d^2x}{dt^2} + 6x + 7y = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3x + 2y = 2t$;

1147. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + x = 2t,\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 9x + 3y = \sin 2t$;

1148. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \frac{dy}{dt} + x - z = \cos t \\ \frac{dz}{dt} + x = 0 \end{cases}$.

Folosind metoda soluțiilor particulare, să se integreze sistemele următoare:

1149. $\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = 0,\quad \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$;

1150. $\begin{cases} \frac{4dy}{dx} + 9\frac{dz}{dx} + 44y + 49z = 0 \\ 3\frac{dy}{dx} + 7\frac{dz}{dx} + 34y + 38z = 0 \end{cases}$;

1151. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t \\ \frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{-2t} \end{cases}$;

1152. $\begin{cases} x\frac{dy}{dx} + y + 2z = x^4 \cos x \\ x\frac{dz}{dx} - 3y - 4z = 0 \end{cases}$;

1153. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + y + 2z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + x + y - z = 0 \\ \frac{dz}{dt} + 2x + y + z = 0 \end{cases}$;

1154. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - x = 0 \end{cases}$;

1155. $\frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}$, $\frac{dy}{dt} = -x + z$, $\frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$;

1156. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x + 18y - 9z = 4 + 18t - 9t^2 \\ \frac{dy}{dt} + x - 5y + 2z = -5t + 2t^2 \\ \frac{dz}{dt} + 3x - 14y + 6z = -3 - 12t + 6t^2 \end{cases}$.

Să se integreze sistemele:

1157. $\begin{cases} y' - z' + x\sqrt{3} = \sin t \\ z' - x' + y\sqrt{3} = \sin t \\ x' - y' + z\sqrt{3} = \sin t \end{cases}$;

1158. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x - y + z \\ \frac{d^2z}{dt^2} = x + y - z \end{cases}$.

1159. Se dă sistemul :

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{7x - 6y} = \frac{dt}{t};$$

1) Eliminînd funcţiile x şi y să se integreze.

2) Reluînd direct integrarea acestui sistem, să se determine un număr suficient de integrale prime.

Să se determine liniile de cîmp ale următoarelor cîmpuri vectoriale :

1160. $\bar{v} = (ax + yz)\bar{i} + (ay + xz)\bar{j} + (az + xy)\bar{k}$

1161. $\bar{v} = x\frac{a^2 + z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\bar{i} + y\frac{a^2 + z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\bar{j} - \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{k}$

1162. $\bar{v} = (xz - y)\bar{i} + (yz + x)\bar{j} + (1 + z^2)\bar{k}$

1163. $\bar{v} = (3x^2y - y^3)\bar{i} + (x^3 - 3xy^2)\bar{j} + \frac{xy(y^2 - x^2)}{z}\bar{k}$

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI METODA MATRICEALĂ

Un astfel de sistem se scrie sub forma :

(1) $\frac{dX}{dt} = AX + B$

X fiind matricea coloană a funcţiilor necunoscute (definite în $\mathbf{R}$ şi cu valori în C), A o matrice numerică cu termenii reali sau complecşi, B matricea termenilor din membrul al doilea. Numărul funcţiilor necunoscute fiind n.

I. 1) **Sisteme omogene.** Un sistem de ecuaţii diferenţiale de primul ordin liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi se poate scrie :

(2) $\frac{dX}{dt} = AX$ unde $A = [a_i^j]$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$

soluţia corespunzătoare matricei iniţiale X_0 pentru $t = 0$ se scrie

(3) $X = e^{At} X_0$

Este vorba de o formulă teoretică, calculul lui e^{At} fiind în general dificil. Vom arăta cum se procedează cînd A este diagonalizabilă. Se obţine

(4) $X(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} A_i X_0$ (λ_i valori proprii distincte)

Formula precedentă ne dă soluţia corespunzătoare valorilor iniţiale X_0, ea nu pune în evidenţă structura mulţimii soluţiilor. Vom relua problema în cazul cînd A este diagonalizabilă.

Mulţimea soluţiilor. Se numeşte soluţie a sistemului 2) orice sistem de n, funcţii $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ verificînd ecuaţia 2) o soluţie se scrie sub formă de matrice coloană

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică imediat că mulțimea soluțiilor ecuației 2) constituie un spațiu vectorial pe corpul numerelor reale. În acest caz va trebui să determinăm o bază și să arătăm că ea este n-dimensională. Două soluții $X_1(t)$ și $X_2(t)$ sînt liniar dependente dacă există două constante λ și μ astfel ca

$$\lambda X_1(t) + \mu X_2(t) = 0 \text{ (cu } |\lambda| + |\mu| \neq 0)$$

aceasta implică că funcțiile $x_i^1(t)$ ale lui X_1 sînt proporționale cu funcțiile $x_i^2(t)$ ale lui X_2, cu același coeficient de proporționalitate pentru orice i. Rezultă în particular că două soluții $X_1 = [C_i\, f(t)]$ și $X_2 = [C_i'\, f(t)]$ sînt independente, dacă matricele coloane ale coeficienților c_i și c_i' sînt independente.

Soluție proprie. O soluție $X_1(t)$ se numește proprie dacă ea este de forma $X_1(t) = e^{\lambda t} X_1^0$ unde X_1^0 (valoarea matricei X_1 pentru $t = 0$) este o matrice formată din constante. Introducînd în ecuația (2) trebuie să avem $\lambda X_1^0 = AX_1^0$, adică X_1^0 este un vector propriu al matricei A asociat valorii proprii λ.

Presupunînd A diagonalizabilă, există n vectori proprii $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ formînd o matrice de trecere $P = [X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0]$. Să studiem ce devine sistemul dacă se efectuează schimbarea de variabilă $X = PY$ sau invers $Y = P^{-1}X$. Cele n noi funcții necunoscute $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt astfel ca

$$P\frac{dY}{dt} = APY \text{ sau } \frac{dY}{dt} = DY\,; \text{ unde } D = P^{-1}AP$$

Rezolvarea sistemului Y este imediată, căci D fiind o matrice diagonală variabile sînt separate. Fie λ_i' (i variind de la 1 la n) valorile proprii ale matricei A, orice soluție se scrie:

$$(5) \qquad Y = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1' t} \\ C_2 e^{\lambda_2' t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n' t} \end{bmatrix}$$

cu n constante arbitrare c_i se deduce:

$$(6) \quad X = PY = C_1 e^{\lambda_1' t} X_1^0 + C_2 e^{\lambda_2' t} X_2^0 + \ldots + C_1 e^{\lambda_n' t} X_n^0$$

orice soluție $X(t)$ este o combinație liniară a n soluții proprii independente. Într-adevăr, independența vectorilor $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ necesită pe aceea a soluțiilor asociate. Invers, mulțimea funcțiilor $X(t)$ definită prin 6) unde X_0^i sînt independente, este soluția generală a sistemului diferențial $\frac{dX}{dt} = AX$, unde A este diagonalizabilă. Într-adevăr 6) se scrie:

$$X = [X_1^0\ X_2^0, \ldots, X_n^0] \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1' t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n' t} \end{bmatrix} = PY$$

Y este soluția generală a sistemului $\frac{dY}{dt} = DY$

unde $D = \text{diag}\,\{\lambda_i'\}$ și prin urmare X este soluția sistemului

$$\frac{dX}{dt} = (PDP^{-1})X = AX$$

Scanned with OKEN Scanner

În rezumat, am obținut o bază formată din n soluții proprii; spațiul soluțiilor este deci cu n dimensiuni.

Teoremă. 1) Pentru ca sistemul (2) cu n funcții necunoscute să admită n soluții proprii formînd o bază a mulțimii soluțiilor este necesar și suficient ca A să fie diagonalizabilă

2) Soluția generală X a sistemului (2) este definită de

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

unde prin definiție

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

II. **Sisteme cu membrul al doilea.** 1) Soluția generală a sistemului (1) este suma unei soluții particulare și soluția generală a sistemului omogen asociat (2).

2) Dacă membrul al doilea B este definit prin $B(t) = e^{\lambda t}B_0$, unde B_0 este constant, există o soluție particulară X de forma:
$X(t) = e^{\lambda t}X_0$, dacă λ nu este o valoare proprie a matricei A.
$X(t) = e^{\lambda t}(X_0 + tX_1)$, dacă λ este o valoare proprie simplă a matricei A.
$X(t) = e^{\lambda t}(X_0 + tX_1 + t^2X_2)$, dacă λ este o valoare proprie dublă a matricei A etc.

Să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale:

1164. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x - 6y \\ \frac{dy}{dt} = 12x + 10y \end{cases}$;

1165. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + z \end{cases}$;

1166. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$;

1167. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -23x - 18y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 36x + 28y \end{cases}$;

1168. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 23x + 18y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -36x - 28y \end{cases}$;

1169. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + 3y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -x - 2y \end{cases}$;

1170. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$;

Scanned with OKEN Scanner

1171. Să se determine soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$$

1172. Să se determine soluția sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z + e^{2t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z + e^{2t} \end{cases}$$

definită prin $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

1173. Se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - y - 5z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + z \Leftrightarrow \dfrac{dX}{dt} = AX \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y - z \end{cases}$$

1) Am determinat în problema nr. 41 o matrice T în așa fel ca matricea $T^{-1}AT$ să fie de forma Jordan, să se utilizeze acest rezultat pentru a obține soluția generală a sistemului. Să se determine soluția x, y, z luînd pentru $t = 0$, valorile x_0, y_0, z_0.

2) Se notează prin I matricea unitate și se scrie $B = A - 4I$, să se calculeze B^n, e^{Bt}, e^{At}. Să se deducă expresia soluției x, y, z a sistemului dat, luînd pentru $t = 0$, valorile x_0, y_0, z_0.

CAPITOLUL XVII

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL I LINIARE

Să se integreze ecuațiile:

1174. $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1175. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Scanned with OKEN Scanner

1176. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

1177. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x$;

1178. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$;

1179. $xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2)$;

1180. $2y(2-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + z^2 - y^2 - 4x)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0$;

1181. $(y + x)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} = z$;

1182. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$;

1183. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

1184. Să se determine suprafața care verifică ecuația cu derivate parțiale $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ și care trece prin curba $x = y$, $z = x^2$.

1185. Să se determine integrala generală a ecuației $2y\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2y = 0$ și suprafața care trece prin parabola $x = 0$, $y^2 = 2z$.

1186. Să se determine integrala ecuației $z(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ care se reduce la $z = \sqrt{y}$ pentru $x = 1$.

1187. Să se integreze ecuația

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - a}; \quad a > 0.$$

Să se arate că suprafețele integrale sînt riglate. Să se determine suprafața care trece prin curba $x = 2z$, $x^2 + y^2 = 4a^2$.

1188. Să se integreze ecuația $2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$ și să se deducă modul de generare a suprafețelor integrale. Să se determine o suprafață integrală care trece prin hiperbola

$$x = a, \; z^2 - y^2 = a^2.$$

1189. Să se integreze ecuația $(y^2 - x^2 + 2xz)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ și să se deducă modul de generare a suprafețelor integrale.

Să se determine acea suprafață care conține elipsa $x = 0$, $y^2 + 4z^2 = 4a^2$.

Scanned with OKEN Scanner

1190. Să se integreze ecuația $x(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)=0$ și să se determine o suprafață integrală care conține cercul $x^2+y^2=R^2$, $z=a$.

1191. 1) Să se integreze ecuația $2\operatorname{ch} x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\operatorname{sh} x\frac{\partial z}{\partial y}-z\operatorname{sh} x=0$.

2) Să se determine suprafața integrală care conține dreapta $x=y=z$.

3) Să se determine suprafața integrală care conține parabola $x=0$, $z^2=2p(y-a)$.

1192. Să se integreze ecuația

$$(qy-px)(x^2-y^2)+2z(x^2+y^2)=0$$

Să se determine suprafața integrală care trece prin curba

$$x=\operatorname{tg}\varphi;\quad y=\frac{1}{\cos\varphi};\quad z=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

1193. Să se determine suprafețele S astfel ca dacă N este urma pe planul xOy a normalei într-un punct oarecare M al suprafeței, puterea punctului O în raport cu sfera de centru N și de rază $\overline{MN}$ are o valoare constantă k^2.

1194. Să se determine suprafețele S astfel că dacă N este urma normalei pe planul xOy, să avem $\overline{MN}=\overline{ON}$.

1195. Planul tangent în punctul M al unei suprafețe taie Oz în punctul P. Dreapta PM taie planul xOy în Q. Să se formeze și integreze ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor S astfel ca punctul Q să aibă o abscisă dată a. Să se demonstreze că suprafețele sînt riglate. Să se determine aceea dintre suprafețe care conține cercul $z=a$, $x^2+y^2=ax$.

1196. Fie M un punct al unei suprafețe, m proiecția lui pe planul xOy, N punctul de intersecție al planului tangent în M cu dreapta dusă prin O perpendiculară pe planul OZM. Să se determine ecuația generală a suprafețelor S așa ca $\overline{ON}=\overline{Om}$. Să se determine dintre ele aceea care trece prin $y=0$, $z^2=2x$.

1197. Să se determine suprafețele care taie ortogonal sferele ce trec printr-un punct dat și ale căror centre se află pe o dreaptă fixă care trece prin acel punct.

1198. Să se determine suprafețele S astfel ca planul tangent într-un punct oarecare M al suprafeței să conțină perpendiculara dusă din M pe planul său polar în raport cu paraboloidul $xy=az$. Să se determine suprafața integrală care conține dreapta $x+y=1$, $z=b(x-y)$.

1199. Să se determine suprafețele S în așa fel încît dacă T este punctul de intersecție al planului tangent într-un punct oarecare M al suprafeței cu axa Oz, să avem $\overline{OM}=\overline{OT}$. Să se determine suprafața integrală care trece prin hiperbola $2yz=1$, $x=1$.

1200. Să se integreze ecuația cu derivate parțiale

$$xy^2p+x^2yq=z(x^2+y^2).$$

Să se determine funcția arbitrară astfel încît curbele caracteristice să formeze o familie de linii asimptotice ale suprafeței integrale. Să se determine traiectoriile ortogonale ale suprafeței astfel obținute.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine suprafețele de cîmp ale următoarelor cîmpuri vectoriale:

1201. $\bar{v} = x(x^2 + 3y^2)\bar{i} + y(3x^2 + y^2)\bar{j} + 2z(x^2 + y^2)\bar{k}$.

1202. $\bar{v} = y(3x^2 + y^2 + z^2)\bar{i} - 2x(x^2 + z^2)\bar{j} + 2xyz\bar{k}$.

1203. Se dă cîmpul $\bar{v} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ și se cere suprafața de cîmp care trece prin cercul $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

1204. Să se determine suprafețele S, în așa fel că dacă P și Q sînt punctele de intersecție ale normalei în M și ale paralelei duse prin M la axa Oz cu planul xOy, suprafața triunghiului OPQ este constantă și egală cu $\frac{K^2}{2}$.

1205. Să se determine suprafețele S în așa fel că dacă P și Q sînt punctele de intersecție ale normalei în M și ale paralelei duse prin M la axa Oz cu planul xOy, volumul tetraedrului $MOPQ$ este constant și egal cu $\frac{K^3}{6}$.

1206. Într-un punct oarecare M al unei suprafețe se duce normala care întîlnește în punctul P planul xOy. Să se determine suprafețele S în așa fel ca segmentul MP să fie văzut din origine sub un unghi drept.

1207. Se consideră funcția $f(\rho)$ unde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1) Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

2) Să se evalueze integrala triplă

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz$$

întinsă la volumul cuprins între două sfere de centrul O și raze a și b.

3) Să se determine funcția $f(\rho)$ astfel ca ea să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{f(\rho)}{4(x^2 + y^2 + z^2)} = 0.$$

1208. P, Q, A, B, C fiind cinci funcții de x și y, se consideră ecuația cu derivate parțiale:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = Az^2 + Bz + C$$

Să se arate că soluția generală este de forma:

$$z = \frac{\alpha F(\varphi) + \beta}{\gamma F(\varphi) + \delta}$$

unde α, β, γ, δ și φ sînt cinci funcții cunoscute de x, y și unde F este o funcție arbitrară de o variabilă. Să se arate că biraportul a patru soluții particulare z_1, z_2, z_3, z_4 este soluția ecuației omogene

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA DOUA
SOLUȚII

CAPITOLUL I

VALORI PROPRII, VECTORI PROPRII, DIRECȚII PROPRII ALE UNEI MATRICI PĂTRATE. REDUCEREA UNEI MATRICI PĂTRATE

1. $A = [a_i^j]$ cu $a_i^j = 0$ pentru $i > j$. Matricea $A - \lambda I$ este de asemenea, triunghiulară, determinantul său se calculează imediat. Se obține

$$\Delta(\lambda) = (a_1^1 - \lambda)(a_2^2 - \lambda)\ldots(a_n^n - \lambda)$$

Două matrici diagonale, avînd aceleași elemente diagonale au același polinom caracteristic.

2. Presupunînd matricea A regulată, avem

$$\Delta(\lambda) = \det(AB - \lambda I) = \det[A(B - \lambda A^{-1})] = \det A \det(B - \lambda A^{-1}) =$$
$$= \det(B - \lambda A^{-1}).\ \det A = \det[(B - \lambda A^{-1})A] = \det(BA - \lambda I).$$

3. a) $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -(2+\lambda) & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2) - 5 = \lambda^2 - 9 = 0$

de unde valorile proprii $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 3$

b) $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{k_0+k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{k_0+k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\frac{k_0+k}{m} + \frac{k_0}{m}\cdot\frac{k_0+2k}{m} = 0$

de unde valorile proprii $\lambda_1 = \frac{k_0}{m}$; $\lambda_2 = \frac{k_0+2k}{m}$

c) $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, de unde valorile proprii

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 3.$$

d) $\Delta(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$ de unde valorile proprii

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$$

e) $\Delta(\lambda) = -(a+\lambda)(\lambda^2 + 3a\lambda) = 0$, valorile proprii

$$\lambda_1 = -3a,\ \lambda_2 = -a;\ \lambda_3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

f) $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0$, valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$. Matricea dată fiind o matrice hermetiană are valorile proprii reale.

g) $\Delta(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{3})(3 - \lambda^2) = 0$, valorile proprii sînt

$$\lambda_1 = -i\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{3}; \quad \lambda_3 = \sqrt{3}.$$

4. $\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + 2a^2\lambda^2 + (2a^2b^2 - a^4 + b^4)\lambda + 2a^2b^2(b^2 - a^2)$

$\Delta(\lambda) = 0$, admite rădăcinile $\lambda_1 = a^2 - b^2$ și

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 10a^2b^2 + b^4})$$

pentru matricea B polinomul caracteristic este $\Delta(\lambda) = \lambda^2(3 - \lambda)$; valorile proprii sînt: $\lambda = 0$, rădăcină dublă și $\lambda = 3$.

5. Polinomul caracteristic se scrie:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 - \lambda & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 - \lambda & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Se adună la elementele primei coloane, elementele celorlalte coloane, ceea ce permite a scoate în factor $(a + b)^2 - \lambda$. Rezultă:

$$\Delta(\lambda) = [(a + b)^2 - \lambda] \begin{vmatrix} a^2 - ab - \lambda & b^2 - ab & ab - b^2 \\ b^2 - ab & a^2 - ab - \lambda & ab - b^2 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= [(a + b)^2 - \lambda][(a - b)^2 - \lambda](a^2 - b^2 - \lambda)^2$$

valorile proprii sînt $\lambda_1 = (a + b)^2$; $\lambda_2 = (a - b)^2$; $\lambda_3 = \lambda_4 = a^2 - b^2$. Determinantul lui A se obține făcînd $\lambda = 0$ în polinomul caracteristic, așadar $\text{Det } A = (a^2 - b^2)^2$.

6. Toate elementele matricei A sînt egale cu ab. Determinantul se calculează ușor prin combinații ale liniilor; se obține

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - nab\,\lambda^{n-1})$$

7. Ecuația caracteristică este:

$$\lambda[\lambda^2 - (4\alpha - \beta)\lambda + 4\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^2] = 0$$

Se obțin valorile proprii $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2(\alpha - \beta)$; $\lambda_3 = 2\alpha + \beta$

8. $\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(\alpha + \beta + \gamma) + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma) - (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma)\Delta(\lambda) = 0$, conduce la $[\lambda - (\alpha + \beta + \gamma)][\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma) = 0$. Așadar se obțin valorile proprii

$$\lambda_1 = \alpha + \beta + \gamma; \quad \lambda_2, \lambda_3 = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma}$$

9. $D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un polinom $P_{n+1}(x)$ de gradul $n + 1$. $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \ldots$ care admite rădăcinile $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$, căci dacă se face $x = a_i (1 \leqslant i \leqslant n - 1)$ în determinant, două din

liniile sale devin identice. Se realizează uşor descompunerea în factori a determinantului scăzînd succesiv linia a doua din prima, a treia din a doua, $a(n+1)^a$ din n^a. Se obţine

$$D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & x - a_n & 1 - x & \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n & x & \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)[x(x - a_n) + (x - 1)(a_1 + a_2 + \ldots a_n)]$$

cele $n - 1$, rădăcini $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sînt independente de a_n; celelalte două sînt rădăcinile trinomului

$$x^2 + x(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

$$\forall a_n ; \; x_n + x_{n-1} = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}).$$

Valorile proprii ale matricei M sînt rădăcinile ecuaţiei $\Delta(1 - \lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, Δ fiind determinantul matricei $M - \lambda I$.

$$\Delta(1 - \lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a_2 & a_2 & \ldots & a_n \\ \cdot & & & & a_n \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & a_n \\ a_1 & & a_2 \ldots a_n & & 1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x \; a_n \\ a_1 & a_2 & & & a_n \; x \end{vmatrix} = \Delta(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) ; \text{ (se notează } 1 - \lambda = x)$$

Conform celor stabilite precedent

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \; x \end{vmatrix}$$

se anulează pentru $x = a_p$: $1 \leqslant p \leqslant n$ şi pentru $x = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, căci adunînd la elementele coloanei întîi elementele celorlalte coloane se obţine factorul $x + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Valorile proprii ale matricei M sînt: $1 - a_1$; $1 - a_2 \ldots 1 - a_{n-1}$, $1 - a_n$, $1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația caracteristică este

$$(\lambda - 1 - \sum_1^n a_i) \prod_{i=1}^n (\lambda - 1 + a_i) = 0$$

10. Pentru simplificare se consideră A o matrice pătrată de ordinul al doilea, raționamentul este însă general. Polinomul caracteristic al matricei B se scrie

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & b & -\lambda & 0 \\ c & d & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Se adună la linia a treia, prima linie înmulțită cu λ, la linia a patra a doua înmulțită cu λ, de unde

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a - \lambda^2 & b & 0 & 0 \\ c & d - \lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \lambda^2 & b \\ c & d - \lambda^2 \end{vmatrix}$$

Se vede că ecuația caracteristică a matricei B se deduce din aceea a matricei A schimbînd λ în λ^2; cele $2n$ valori proprii ale matricei B sînt $\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2} \ldots \pm\sqrt{\lambda_n}$.

11. Dacă $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic, $\det A = P(0) \neq 0$ matricea A este deci inversabilă.

Metoda întîi. $A(A^{-1} - \lambda I) = I - \lambda A = -\lambda\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)$.

Determinantul unui produs de matrici este egal determinantul produsului acestor matrici:

$$\det[A(A^{-1} - \lambda I)] = (\det A)[\det(A^{-1} - \lambda I)] = P(0)R(\lambda)$$

înmulțind o matrice prin μ, se înmulțește determinantul sau prin μ^n

$$\det\left[(-\lambda)\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)\right] = (-\lambda)^n \det\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right) = (-1)^n \lambda^n P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Așadar $P(0)R(\lambda) = (-1)^n \lambda^n P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Metoda a doua: se știe că dacă termenii lui A aparțin lui C (mai general dacă K este algebric închis), se poate găsi o matrice inversabilă T, astfel ca matricea $B = T^{-1}AT$ să fie triunghiulară, termenii b_i^i ai diagonalei sînt valorile proprii λ_i, fiecare figurînd de un număr de ori egal cu ordinul de multiplicitate. Prin ipoteză nici una din valorile proprii nu este nulă [se presupune $P(0) \neq 0$]. Se vede imediat că $B^{-1} = T^{-1}A^{-1}T$, polinoamele caracteristice ale lui B^{-1} și T^{-1} sînt deci identice. Un calcul simplu arată că termenii diagonalei lui B^{-1} sînt egali cu: $\frac{1}{b_i^i} = \frac{1}{\lambda_i}$. Se deduce imediat polinomul caracteristic R a lui B

$$R(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_i}\right) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\lambda_i}\left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{dar } \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda}\right) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_i\right) = P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \text{termenul constant al lui } P = P(0)$$

$$R(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda^n P\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{P(0)}$$

12. *Se numeşte urma unei matrici pătrate, suma termenilor diagonalei sale principale.* Dacă se notează fiecare din matricele propuse cu A, rezultă :

a) $\operatorname{tr} A = 0$; *b)* $\operatorname{tr} A = \frac{2(k+k_0)}{m}$; c) $\operatorname{tr} A = \frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}$

d) $\operatorname{tr} A = 2$; e) $\operatorname{tr} A = -4a$; f) $\operatorname{tr} A = 29$ g) $\operatorname{tr} A = 3a + 2b + c$;

h) $\operatorname{tr} A = 1 + 2e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

13. a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$; $\operatorname{tr} A = s_1 = 0$; $\operatorname{tr} A^2 = s_2 = 18$ se ştie că $\alpha_1 = -s_1$ şi $\alpha_2 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 s_1 + s_2)$, aşadar $\alpha_1 = 0$ şi $\alpha_2 = -9$, ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 9 = 0$.

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{k_0+k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k_0+k}{m} \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{(k_0+k)^2}{m^2} + \frac{k^2}{m^2} & -\frac{2k(k_0+k)}{m^2} \\ -\frac{2k(k_0+k)}{m^2} & \frac{(k_0+k)^2}{m^2} + \frac{k^2}{m^2} \end{bmatrix}$

avem $\operatorname{tr} A = \frac{2(k_0+k)}{m}$; $\operatorname{tr} A^2 = 2\left[\frac{(k_0+k)^2}{m^2} + \frac{k^2}{m^2}\right]$

folosind formulele lui Bôcher avem :

$$\alpha_1 = \frac{-2(k_0+k)}{m}; \quad \alpha_2 = \frac{k_0(k_0+2k)}{m^2}$$

ecuaţia caracteristică este :

$$\lambda^2 - \frac{2(k_0+k)}{m}\lambda + \frac{k_0(k_0+2k)}{m^2} = 0.$$

c) Se obţine $\lambda^2 - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\lambda + \frac{k_1+k_2}{m_1}\frac{k_2}{m_2} - \left(\frac{k_2}{m_1}\right)^2 = 0.$

Scanned with OKEN Scanner

d) Matricea propusă este $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, avem

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 14 & - & - \\ - & 3 & - \\ - & - & 3 \end{bmatrix},$$

pentru că numai urma matrici ne interesează este inutil de a calcula în întregime puterea a treia a matricei. Avem :

$$s_1 = 2 : \alpha_1 = -2$$

$$s_2 = 14 : \alpha_2 = -\frac{1}{2}(-4 + 14) = -5$$

$$s_3 = 20 : \alpha_3 = -\frac{1}{3}(-5 \times 2 - 2 \times 14 + 20) = 6$$

ecuația caracteristică este : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

e) Matricea propusă este

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & a \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = a^2 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^3 = a^3 \begin{bmatrix} -5 & . & . \\ . & -18 & . \\ . & . & -5 \end{bmatrix}$$

se obține

$$s_1 = -4a; \quad \alpha_1 = 4a$$

$$s_2 = 10a^2 \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}(-16a^2 + 10a^2) = 3a^2$$

$$s_3 = -28a^3 \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3}(-12a^3 + 40a^3 - 28a^3) = 0$$

ecuația caracteristică este :

$$\lambda^3 + 4a\lambda^2 + 3a^2\lambda = 0$$

f) Se deduce ecuația caracteristică $\lambda^4 - 29\lambda^3 + 72\lambda^2 - 29\lambda + 1 = 0$

g) $\lambda^3 - (3a + 2b + c)\lambda^2 + (2ab + 2ac + bc)\lambda - abc = 0$

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}; \quad A^2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^3 = 3 \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & e^{\frac{2\pi i}{3}} & . \\ . & . & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner

$$s_1 = 1 + 2e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -i\sqrt{3},\ \alpha_1 = i\sqrt{3}$$

$$s_2 = 3 \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}(3 + 3) = -3$$

$$s = 3\left(1 + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = 3\left[1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3i\sqrt{3}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}(3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}) = -3i\sqrt{3}$$

ecuația caracteristică este

$$\lambda^3 + i\sqrt{3}\lambda^2 - 3\lambda - 3i\sqrt{3} = 0.$$

14. a) Ecuația caracteristică este $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$, valorile proprii sînt $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 6$.

Ecuațiile care dau componentele vectorilor proprii sînt:

$$(4 - \lambda)x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 + (4 - \lambda)x_2 = 0$$

pentru $\lambda_1 = 2$ se obține $x_1 + 2x_2 = 0$ sau $\frac{x_1}{-2} = \frac{x_2}{1} = k$, așadar vectorul propriu $v_1 = (-2, 1)$. Pentru $\lambda_2 = 6$ se obține vectorul propriu $v_2 = (2, 1)$.

b) Ecuația caracteristică $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ se obțin valorile proprii; $\lambda_1 = -2$ și $\lambda_2 = 7$ și vectorii proprii $v_1 = (-5, 4)$ și $v_2 = (1,1)$.

c) Ecuația caracteristică $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, valorile proprii $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 2$ și vectorii proprii $v_1 = (-3, 8)$; $v_2 = (-1, 1)$.

d) Ecuația caracteristică $\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda - 24 = 0$ sau $(\lambda + 2)(\lambda^2 + 3\lambda - 12) = 0$, valorile proprii $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{2}$. Ecuațiile care dau componentele vectorilor proprii sînt:

$$-(1 + \lambda)x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + (2 - \lambda)x_2 - 6x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 - (6 + \lambda)x_3 = 0$$

pentru $\lambda_1 = -2$, componentele vectorilor proprii verifică sistemul

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Se obține: $\frac{x_1}{-1} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{3}$

Scanned with OKEN Scanner

deci vectorul propriu $v_1 = (-1, 5, 3)$. Pentru $\lambda_2 = -\frac{3+\sqrt{57}}{2}$ se obține vectorul propriu $v_2 = [3(\sqrt{57}-1), 6(\sqrt{57}-1), 4(\sqrt{57}+6)]$ pentru $\lambda_3 = \frac{-3+\sqrt{57}}{2}$ se obține vectorul propriu:

$$v_3 = [3(\sqrt{57}+1), 6(\sqrt{57}+1), 4(\sqrt{57}-6)]$$

e) Ecuația caracteristică este $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda + 15 = 0$, se obțin valorile proprii $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ și vectorii proprii $v_1 = (-7, 11, 12)$; $v_2 = [\sqrt{5}(\sqrt{5}-3), 4\sqrt{5}, 5(1-\sqrt{5})]$; $v_3 = (37+3\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 21+5\sqrt{5})$.

f) ecuația caracteristică este $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0$ sau $(\lambda-1)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = (\lambda-1)^2(\lambda-7) = 0$.

$\lambda = 1$ este o valoare proprie dublă. Ecuațiile care dau componentele vectorilor proprii sînt:

$$(2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + (3-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + (4-\lambda)x_3 = 0.$$

Pentru $\lambda = 1$, componentele vectorilor proprii verifică ecuația

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

care este satisfăcută de mulțimea vectorilor $u = [\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)]$ sau $u = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$ sub-spațiul propriu generat de acești vectori este bidimensional. Vectorii $u_1 = (1, 0, -1)$ și $u_2 = (0, 1, -1)$ formează o bază a acestui sub-spațiu. Pentru $\lambda = 7$ se obține sistemul:

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

se obține $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3}$, sub-spațiul propriu este deci cu o dimensiune. Se poate lua ca bază a acestui sub-spațiu vectorul $u_3 = (1, 2, 3)$.

g) Ecuația caracteristică este $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$; pentru $\lambda = 0$ componentele vectorilor proprii verifică ecuația $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, care este verificată de mulțimea vectorilor $u = (\alpha - 2\beta, \alpha, \beta)$ sau $u = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)$. Sub-spațiul generat de acești vectori este bidimensional. Pot fi luați ca vectori proprii vectorii $u_1 = (1, 1, 0)$ și $u_2 = (-2, 0, 1)$ care constituie o bază a sub-spațiului de mai sus. Pentru $\lambda = 2$, sub-spațiul generat este cu o dimensiune, se poate lua ca bază a acestui sub-spațiu vectorul $u_3 = (1, 3, 2)$.

h) Se obțin valorile proprii $\lambda_1 = -5$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = -1$ și $\lambda_4 = 2$ și vectorii proprii

$$u_1 = (28, 35, 13, -8); \quad u_2 = (1, 1, 0, 0); \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \text{ și}$$
$$u_4 = (0, 0, 1, 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

15. a) Se obțin valorile proprii: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ și vectorii proprii $u_1 = (9, 3, 2)$; $u_2 = (5, 1, 2)$; $u_3 = (4, 2, 1)$.

b) Valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1 - 2\sqrt{2}\,i}{3}$; $\lambda_3 = \frac{1 + 2\sqrt{2}\,i}{3}$ și vectorii proprii:

$$u_1 = (1, 0, 1);\ u_2 = (\sqrt{2} - i,\ -\sqrt{2} - 2i,\ -\sqrt{2} + i);\ u_3 = (\sqrt{2} + i,$$
$$-\sqrt{2} + 2i,\ -\sqrt{2} - i).$$

c) Valorile proprii $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 1$; $\lambda_4 = 2$ și vectorii proprii:

$$u_1 = (-7, 1, -5, 5);\ u_2 = (1, -1, 0, 0);\ u_3 = (-13, -37, 3, 1);$$
$$u_4 = (1, 2, 0, 0).$$

16. Ecuația caracteristică este:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \ldots 0 & a_n \\ 0 & -\lambda & . & a_{n-1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & -\lambda & a_2 \\ a_n & a_{n-1} \ldots & a_2 & a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sau $(-1)^n[\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - (a_2^2 + \ldots + a_n^2)\lambda^{n-2}] = 0$

așadar, $\lambda^{n-2}[\lambda^2 - a_1\lambda - (a_2^2 + \ldots + a_n^2) = 0$

valorile proprii sînt $\lambda = 0$, rădăcină multiplă de ordinul $n - 2$ și

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4(a_2^2 + \ldots + a_n^2)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4(a_2^2 + \ldots + a_n^2)}}{2}$$

vectorii proprii: $\lambda = 0$ (unul din $a_i \neq 0$); $x_n = 0$, x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ nedeterminate: $\lambda = \lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, n)$.

$$(a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0)\ \frac{x_1}{a_n} = \frac{x_2}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{a_2} = \frac{x_n}{\lambda_1}.$$

17. Avem

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

prin adunarea tuturor coloanelor la prima, rezultă după scoaterea în factor a lui $n - \lambda$:

$$\det(M - \lambda I) = (n - \lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \cdot & 1 & \cdots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se scade prima coloană din celelalte şi rezultă

$$\det(M - \lambda I) = (n - \lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (n - \lambda)(-\lambda)^{n-1} = 0$$

pentru $\lambda = 0$, corespund ca vectori proprii toţi vectorii hiperplanului

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

pentru $\lambda = n$, corespund vectorii proprii definiţi prin sistemul

$$-(n-1)x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$x_1 - (n-1)x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2 + \ldots - (n-1)x_n = 0$$

sau $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

spaţiul propriu de dimensiune 1 pus în evidenţă este suplimentar hiperplanului precedent ; φ este deci diagonalizabil şi deci într-o bază a vectorilor proprii, matricea M_1 este :

$$M_1 = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vectorii coloană ai matricei M fiind identici, Im φ este spaţiul vectorial de dimensiune 1, generat de vectorul $(1, 1, \ldots, 1)$; Ker φ este deci de dimensiune $n - 1$, definit prin unica ecuaţie

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

o bază a acestui nucleu este de exemplu formată de vectorii $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n$ ($e_1, e_2, \ldots, e_n$ fiind baza canonică).

18. Vectorul $(1, 0, 1)$ este propriu dacă avem relaţiile

$$1 + c = \lambda\,;\ 2 + c' = 0\,;\ 3 + c'' = \lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $c' = -2$; $c - c'' = 2$. Scriind relațiile analoage pentru ceilalți doi vectori se obțin șase ecuații liniare determinînd coeficienții necunoscuți. Se obține

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

valorile proprii sînt 6, -4, 0.

19. a) vezi exercițiul 14 (a), vectorii proprii sînt $v_1 = (-2, 1)$; $v_2 = (2, 1)$. Se formează matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ deci } P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Așadar:

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{3}$; $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{3}$, la care corespund vectorii proprii $v_1 = (2, 1 - i\sqrt{3})$ și $v_2 = (2, 1 + i\sqrt{3})$. Se formează matricea de trecere:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 - i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{4i\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{3} & -2 \\ -1 + i\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$B = \frac{1}{4i\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{3} & -2 \\ -1 + i\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 - i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - i\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

c) Valorile proprii $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$, la care corespund vectorii proprii: $v_1 = (i, 2)$ și $v_2 = (-2i, 1)$. Se formează matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ așadar } P^{-1} = \frac{1}{5i}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2 & i \end{bmatrix}$$

Așadar $B = \frac{1}{5i}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) valorile proprii sînt $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -1$ vectorii proprii corespunzători sînt: $v_1 = (1, 0, 1)$; $v_2 = (-2, 1, 0)$; $v_3 = (-1, 1, 2)$.

Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ deci } P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e) valorile proprii sînt $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 2$. Vectorii proprii corespunzători sînt $v_1 = (1, 1, -2)$; $v_2 = (4, 3, -4)$; $v_3 = (2, 1, -1)$, matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \text{ deci } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = P^{-1}AP =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

f) Valorile proprii $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$, vectori proprii $v_1 = (5, 1, 2)$; $v_2 = (9, 3, 2)$; $v_3 = (4, 2, 1)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix};$$

$$B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

20. a) Valorile proprii $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 6$. Vectorii proprii corespunzători $v_1 = (3, 2)$; $v_2 = (1, 1)$. Matricea de trecere $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

b) $\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^2 = 0$, o valoare proprie dublă $\lambda = 3$ ecuaţia verificată de componentele vectorilor proprii este $x_1 + x_2 = 0$, deci vectorul propriu $e_1 = (1, -1)$. Aşadar, sub-spaţiul propriu corespunzător generat de vectorul propriu $e_1 = (1, -1)$ este cu o dimensiune deci matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nu este diagonalizabilă. Luînd ca vector de bază vectorul $e_1 = (1, -1)$ şi un vector arbitrat $e_2 = (0, 1)$, matricea se poate triunghiulariza. Matricea de trecere este $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$; $v_1 = (-1, 3)$; $v_2 = (2, 3)$. Matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$: ecuația caracteristică $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$ valorile proprii sînt $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 3$, vactorii proprii $v_1 = (11, 1, -14)$; $v_2 = (-1, 1, 1)$; $v_3 = (1, 1, 1)$. Matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -14 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -15 & 25 & -10 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -15 & 25 & -10 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -14 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e) Ecuația caracteristică: $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$, sau $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 7\lambda + 10) = 0$, valorile proprii: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 1$. Vectorii proprii corespunzători sînt $v_1 = (0, 0, 1)$; $v_2 = (1, -1, 1)$; $v_3 = (2, -1, 0)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Aşadar

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Vezi exercițiul 3) e, valorile proprii sînt $\lambda_1 = -3a$; $\lambda_2 = -a$; $\lambda_3 = 0$; vectorii proprii corespunzători sînt $v_1 = (1, -2, 1)$; $v_2 = (1, 0, 1)$; $v_3 = (1, 1, 1)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a & a & 0\\ a & -2a & a\\ 0 & a & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-3a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

g) vezi exercițiul 3) f, valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$; $\lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$, vectorii proprii sînt $v_1 = (1 + i, -\sqrt{3}, 1)$; $v_2 = (1 - i, 0, -2)$; $v_3 = (1 + i, \sqrt{3}, i)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix}1+i & 1-i & 1+i\\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ 1 & -2 & i\end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP =$$

$$= \frac{1}{6(1+i)}\begin{bmatrix}2 & -\sqrt{3}(1+i) & 1-i\\ 2i & 0 & -2(1+i)\\ 2 & \sqrt{3}(1+i) & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 1 & -i\\ 0 & i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i & 1-i & 1+i\\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ i & -2 & i\end{bmatrix}$$

efectuînd calculele se obține:

$$B = \begin{bmatrix}1-\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

h) Ecuația caracteristică este:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 5 & 9\\ 2 & 1-\lambda & 6 & 8\\ 0 & 0 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & 1 & -(2+\lambda)\end{vmatrix} = (\lambda^2 - \lambda - 2)(3 - 2\lambda - \lambda^2) = 0$$

valorile proprii sînt $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$.

Ecuațiile care dau componentele vectorilor proprii sînt:

$$-\lambda x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0$$
$$2x_1 + (1 - \lambda)x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 - \lambda x_3 + 3x_4 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 - (2 + \lambda)x_4 = 0$$

pentru $\lambda = -3$ se obține sistemul

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

rezultă:

$$\frac{x_1}{-7} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-5} = \frac{x_4}{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

aşadar vectorul propriu $v_1 = (-7, 1, -5, 5)$.
pentru $\lambda_2 = -1$ se obţine sistemul

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

rezultă :

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{0}$$

aşadar, vectorul propriu $v_2 = (1, -1, 0, 0)$. Pentru $\lambda_3 = 1$ se obţine sistemul :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

rezultă : $\frac{x_1}{-13} = \frac{x_2}{-37} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{1}$

aşadar, vectorul propriu $v_3 = (-13, -37, 3, 1)$. Pentru $\lambda_4 = 2$ se obţine sistemul :

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\ -2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

rezultă : $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{0}$, aşadar vectorul propriu $v_4 = (1, 2, 0, 0)$. Se formează matricea de trecere :

$$P = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -13 & 1 \\ 1 & -1 & -37 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 9 \\ 40 & -20 & -70 & -10 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 244 & 268 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 1 & -13 & 1 \\ 1 & -1 & -37 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

efectuînd calculele se obţine

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

i) Valorile proprii sînt $\lambda_1 = -5$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 3$; $\lambda_4 = 4$; vectorii proprii corespunzători sînt: $v_1 = (36, 45, -31, 32)$; $v_2 = (1, 1, 0, 0)$; $v_3 = (0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 36 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 1 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 1 & 1 \\ 32 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{72}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 108 & -36 & 36 & -36 \\ -63 & 63 & 9 & -9 \\ 32 & -32 & 32 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 36 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 1 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 1 & 1 \\ 32 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuînd calculele se obține

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

j) Valorile proprii sînt $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = 4$, vectorii proprii corespunzători sînt: $v_1 = (25, 1, -24, 20)$; $v_2 = (1, 1, 0, 0)$; $v_3 = (0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$. Matricea de trecere P și matricea P^{-1} sînt, respectiv

$$P = \begin{bmatrix} 25 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 1 & 1 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 45 & 25 & 25 & -25 \\ -44 & 44 & -24 & 24 \\ 20 & -20 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

Așadar

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

21. a) Ecuația caracteristică este $(\lambda - 1)^2(\lambda - 7) = 0$. $\lambda = 1$ este o valoare proprie dublă, $\lambda = 7$ o valoare proprie simplă. Pentru $\lambda = 1$, componentele vectorilor proprii verifică ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ecuația este satisfăcută de mulțimea vectorilor $u = [\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)]$ dar $u = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$; subspațiul propriu este deci bidimensional. Se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorii: $u_1 = (1, 0, -1)$ și $u_2 = (0, 1, -1)$. Pentru $\lambda = 7$ se obține sistemul

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

cu soluțiile

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Subspațiul propriu este cu o dimensiune; se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorul $u_3 = (1, 2, 3)$. Condițiile teoremei diagonalizării sînt satisfăcute; orice subspațiu propriu are ca dimensiune ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare. Așadar, matricea este diagonalizabilă. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

deci

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Ecuația caracteristică $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$, o valoare proprie dublă $\lambda = 0$ și una simplă $\lambda = 2$. Pentru $\lambda = 0$ se obține un plan al vectorilor proprii de ecuație $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, satisfăcută de mulțimea vectorilor $u = (2\alpha, 2\beta, \beta - \alpha)$ sau $u = \alpha(2, 0, -1) + \beta(0, 2, 1)$. Subspațiul propriu este bidimensional. Se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorii $u_1 = (2, 0, -1)$ și $u_2 = (0, 2, 1)$. Pentru $\lambda = 2$ subspațiul propriu este unidimensional și se poate lua ca bază vectorul $u_3 = (1, 3, 2)$. Condițiile teoremei diagonalizării fiind satisfăcute, matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Ecuația caracteristică este $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda - 108 = 0$ sau $(\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 36) = 0$; avem rădăcina dublă $\lambda = 3$ și rădăcina simplă $\lambda = 12$. Pentru $\lambda = 3$ componentele vectorilor proprii verifică ecuația:

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

satisfăcută de mulțimea vectorilor $u = [\alpha, \beta, 4(\alpha + \beta)]$ sau $u = \alpha(1, 0, 4) + \beta(0, 1, 4)$, așadar sub-spațiul propriu este bidimensional. O bază a acestui subspațiu este formată din vectorii $u_1 = (1, 0, 4)$, $u_2 = (0, 1, 4)$. Subspațiul corespunzător valorii proprii $\lambda = 12$ este unidimensional, se poate lua ca vector de bază vectorul propriu $u_3 = (-1, -1, 1)$. Fiind satisfăcute condițiile teoremei diagonalizării matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Așadar, $B = P^{-1}AP = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner

d) Ecuația caracteristică este :

$$\lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3(a^2 - b^2)\lambda - (a^3 + 2b^3 - 3ab^2) = 0$$

Pentru rezolvare se face substituția $\lambda = \mu + a$ și ecuația devine $\mu^3 - 3b^2\mu - 2b^3 = 0$. Rezultă $\mu^3 - 3b^2\mu - 2b^3 = (\mu - 2b)(\mu^2 + 2b\mu + b^2) = 0$, se obțin soluțiile $\mu_1 = 2b$; $\mu_2 = \mu_3 = -b$. Așadar $\lambda_1 = a + 2b$; $\lambda_2 = \lambda_3 = a - b$. Pentru $\lambda_1 = a + 2b$, subspațiul propriu este unidimensional, se poate lua ca vector de bază a acestui subspațiu vectorul $u_1 = (1, 1, 1)$. Pentru rădăcina dublă $\lambda = a - b$, componentele vectorilor proprii verifică ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, avem așadar un plan al vectorilor proprii. Mulțimea vectorilor proprii care verifică ecuația este de forma $u = [\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)]$ sau $u = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$; se pot lua ca vectori proprii de bază vectorii $u_2 = (1, 0, -1)$ și $u_3 = (0, 1, -1)$ vectorii u_1, u_2 și u_3 fiind liniari independenți, se formează matrice de trecere :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

deci

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Așadar :

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ 2(a-b) & b-a & b-a \\ b-a & 2(a-b) & b-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

e) Ecuația caracteristică este $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$ deci : $\lambda = -1$ rădăcină dublă și $\lambda = 2$ rădăcină simplă. Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$ este bidimensional și are ecuația $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 0$, ecuația verificată de următorii vectori liniar independenți $u_1 = (\alpha^2, \alpha, -2)$ și $u_2 = (0, -\alpha, 1)$, care pot fi luați ca vectori de bază pentru $\lambda = 2$ subspațiul propriu este unidimensional, vectorul de bază fiind $v_3 = (\alpha^2, \alpha, 1)$. Așadar matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ deci } P^{-1} = -\frac{1}{3\alpha^3}\begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ -3\alpha & 3\alpha^2 & 0 \\ -\alpha & -\alpha^2 & -\alpha^3 \end{bmatrix};$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

22. Pentru $2\cos\varphi \neq 1$, se obțin trei valori proprii distincte deci trei vectori proprii liniar independenți :

$\lambda_1 = -\sin\varphi$ $\quad v_1 = [1, -(1 + 2\cos\varphi), 1]$

$\lambda_2 = -\sin 2\varphi$; $\quad v_2 = [2\cos\varphi, 2\cos\varphi, -(1 + 2\cos\varphi)]$

$\lambda_3 = \sin\varphi + \sin 2\varphi$; $\quad v_3 = (1, 1, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $2\cos\varphi = 1$, valorile proprii λ_1 și λ_2 sînt egale. Le corespunde un plan al vectorilor proprii de ecuație $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Matricea este diagonalizabilă și în acest caz.

23. Ecuația caracteristică :

$$\lambda^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3)\lambda^2 + (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 3)\lambda - \\ - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1) = 0$$

sau

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

rezultă

$$(\lambda - 1)^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

de unde

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = 0$$

o rădăcină dublă $\lambda = 1$ și una simplă

$$\lambda = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Pentru $\lambda = 1$, subspațiul propriu este bidimensional. Mulțimea vectorilor proprii verifică ecuația planului

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

pot fi luate ca vectori de bază vectori proprii liniar independenți $u_1 = (0, -\gamma, \beta)$ și $u_2 = (\gamma, 0, -\alpha)$ pentru $\lambda = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ se obține

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta} = \frac{x_3}{\gamma}$$

se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorul $u_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$. Cu vectorii u_1, u_2 și u_3 se formează matricea de trecere :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \\ \beta & -\alpha & \gamma \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \begin{bmatrix} \alpha\beta & -(\alpha^2 + \gamma^2) & \beta\gamma \\ \beta^2 + \gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}$$

24. A_1 ; $\lambda_1 = 1$ și $u_1 = (1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -1$ este o rădăcină dublă la care corespunde un plan al vectorilor proprii $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. A_1 este diagonalizabilă matricea de trecere fiind

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_2 ; $\lambda_1 = 0$; $u_1 = (1, -a, -b)$; $\lambda_2 = 2$ un plan al vectorilor proprii

$$x_1 = 0 \; ; \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

A_3; două valori proprii duble $\lambda_1 = 3$ și $\lambda_2 = -3$. Se obțin două plane ale vectorilor proprii etc.

25. Ecuația caracteristică $(\lambda - 2)^3(\lambda + 2) = 0$. Pentru rădăcina triplă $\lambda = 2$, ecuațiile care dau componentele vectorilor proprii se reduc la $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Subspațiul propriu generat de acești vectori este tridimensional. Într-adevăr mulțimea vectorilor u care verifică ecuația precedentă este de forma

$$u = (\alpha + \beta + \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \text{ sau } u = \alpha(1,\ 1,\ 0,\ 0) + \beta(1,\ 0,\ 1,\ 0) + \gamma(1, 0,\ 0,\ 1),$$

vectorii $u_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$; $u_2 = (1,\ 0, 1, 0)$, $u_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$ fiind liniar independenți pot fi luați ca vectori de bază. Pentru valoarea proprie $\lambda = -2$, corespunde subspațiul propriu generat de vectorul $u_4 = (-1,\ 1, 1,\ 1)$, care poate fi luat ca vector de bază. Matricea este diagonalizabilă. Matricea de trecere P este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

26. Valorile proprii ale matricei A^2 sînt pătratele valorilor proprii ale matricei A; nu se obține acum decît o singură valoare 4. Subspațiul asociat este suma directă a două sub-spații proprii ale matricei A, adică spațiul $\mathbf{R}^4$ în întregime. Prin urmare $A^2 = 4I$, ceea ce se verifică ușor.

27. La fiecare din valorile proprii duble $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 2$, trebuie să corespundă un sub-spațiu propriu de dimensiune egală cu 2. Pentru $\lambda_1 = 1$ se obține sistemul

$$ax_1 = 0\ \ a'x_1 + bx_2 + x_3 = 0,\ \ a''x_1 + b'x_2 + cx_3 + x_4 = 0$$

a cărui matrice a coeficienților trebuie să fie de rang 2; aceasta necesită $a = 0$. Ultimele două ecuații sînt atunci ecuațiile subspațiului propriu. Pentru $\lambda = 2$ se obține: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $cx_3 = 0$. Trebuie să presupunem $c = 0$, subspațiu propriu fiind $x_1 = x_2 = 0$. Condițiile cerute sînt $a = c = 0$.

28. a) Ecuația caracteristică $\Delta(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$, valorile proprii sînt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; b) vectorii proprii sînt $u_1 = (1,\ 0,\ 1)$; $u_2 = (1,\ 1,\ 0)$; $u_3 = (0,\ 1,\ 1)$; c) Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{așadar } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Rezultă :

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2&-2\\-7&9&7\\-9&9&7\end{bmatrix}$$

$$A^4 = PD^4P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\-15&17&15\\-15&15&17\end{bmatrix}$$

29. Valorile proprii sînt $\lambda_1 = -1$ (dublă), care ne dă un plan al vectorilor proprii generat de vectorii $u_1 = (0, 1, -1)$; $u_2 = (1, 0, -1)$ și $\lambda_2 = 2$ (simplă care ne dă vectorul $u_3 = (1, 1, 1)$.
Avem așadar

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^p&0&0\\0&(-1)^p&0\\0&0&2^p\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\2&-1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

de unde
$$A^p = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2^p+2(-1)^p & 2^p-(-1)^p & 2^p-(-1)^p\\ 2^p-(-1)^p & 2^p+2(-1)^p & 2^p-(-1)^p\\ 2^p-(-1)^p & 2^p-(-1)^p & 2^p+2(-1)^p\end{bmatrix}$$

se obține forma $A^p = a_pA + b_pI$, notînd

$$a_p = \frac{1}{3}[2^p - (-1)^p], \quad b_p = \frac{1}{3}[2^p + 2(-1)^p]$$

Numerele a_p și b_p sînt întregi. Se poate scrie

$$A^p = \frac{2^p}{3}(A + I) + \frac{(-1)^p}{3}(2I - A).$$

30. Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\lambda_2 = 3 - 4i$. Matricea de trecere este :

$$P = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1+2i & 1-2i\end{bmatrix} \text{ de unde } P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}2+i & -2i\\ 2-i & 2i\end{bmatrix}$$

Rezultă :

$$A^p = P\begin{bmatrix}(3+4i)^p & 0\\ 0 & (3-4i)^p\end{bmatrix}P^{-1}$$

Se poate folosi forma trigonometrică notînd $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Rezultă $A^p = \frac{5^p}{8}\begin{bmatrix}8\cos p\alpha - 4\sin p\alpha & 8\sin p\alpha\\ -10\sin p\alpha & 8\cos p\alpha + 4\sin p\alpha\end{bmatrix}$

31. Matricea A este evident de forma următoare :

$$A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & a_1^1 \dots a_1^n\\ 0 & a_2^1 \dots a_2^n\\ 0 & a_3^1 \dots a_3^n\\ \vdots & \vdots\\ 0 & a_n^1 \dots a_n^n\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & B\\ \hline 0 & A_1\end{array}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

notînd cu A_1 o matrice de ordinul $n-1$, apriori oarecare. Pentru $i \geqslant 2$

$$u(e_i) = \sum_1^n a_j^i e_j \text{ avem } u_1(e_i) = \sum_2^n a_j^i e_j$$

matricea endomorfismului u_1 în baza $\{e_2, \ldots, e_n\}$ a lui E_1 este A_1. Însfîrşit forma matricei A arată că polinomul caracteristic a lui u_1 este $\Delta_1(\lambda)$ astfel ca

$$\Delta(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\Delta_1(\lambda)$$

endomorfismul u_1 are aceleaşi valori proprii ca u cu excepţia lui λ_1.

32. Pentru că $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ şi $u(e_2') = \lambda_2 e_2' + ae_1$, matricea lui u în baza $\{e_1, e_2', \ldots, e_n'\}$, are forma următoare

$$A' = \left[\begin{array}{cc:c} \lambda_1 & a & \\ 0 & \lambda_2 & B \\ \hdashline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A_2 \end{array}\right]$$

unde matricea A_2 este o matrice pătrată de ordinul $n-2$. Se observă ca şi în cazul precedent că A_2 este matricea endomorfismului u_2 în baza $\{e_3', \ldots, e_n'\}$; polinomul caracteristic este $\Delta_2(\lambda)$ în aşa fel că

$$\Delta(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\Delta_2(\lambda)$$

este suficient a continua căci u_2 posedă cel puţin un vector propriu. După cel mult $n-1$ operaţii vom obţine pentru u o matrice triunghiulară. Este de altfel posibil de a găsi o infinitate.

33. Ecuaţia caracteristică $\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = 0$. Avem o valoare proprie dublă. Subspaţiul propriu corespunzător generat de vectorul propriu este cu o dimensiune, deci endomorfismul u nu este diagonalizabil. Pentru $\lambda = 2$, componentele vectorilor proprii verifică ecuaţia $x_1 + x_2 = 0$ sau $\frac{x}{1} = \frac{x_2}{-1}$, deci avem vectorul propriu $e_1 = (1, -1)$. Se ia drept bază vectorul e_1 şi un vector arbitrar spre exemplu $e_2 = (0, 1)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ aşadar } B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

34. Ecuaţia caracteristică $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2 = 0$. Ecuaţiile care dau componentele vectorilor proprii pentru $\lambda = -1$ sînt

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Avem $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ şi $x_1 - x_2 = 0$ sau $x_1 = x_2$, aşadar

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{0},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci vectorul propriu (1, 1, 0, 0). Subspațiul propriu corespunzător este cu o dimensiune deci u nu este diagonalizabil. Se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorul $e_1' = (1, 1, 0, 0)$. Pentru $\lambda = 1$ se obține vectorul propriu $e_3' = (1, 1, 1, 1)$. Subspațiul propriu corespunzător este cu o dimensiune, se poate lua ca bază a acestui subspațiu vectorul e_3'. Avem relațiile: $e_1' = e_1 + e_2$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = e_1' + e_3 + e_4$. Se arată ușor că familia $C = \{e_1', e_2, e_3', e_4\}$ formează o bază a lui E. Mai mult

$$u(e_1') = (-1, -1, 0, 0) = -(1, 1, 0, 0) = -e_1'$$

$$u(e_2) = (-4, -5, 0, 0) = -4e_1 - 5e_2 = -4(e_1' - e_2) - 5e_2 = -4e_1' - e_2$$

$$u(e_3') = e_3'; \; u(e_4) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3 - e_4 = 2(e_1' - e_2) + 4e_2 - 2(e_3' - e_1' - e_4) - e_4,$$

sau

$$u(e_4) = 4e_1' + 2e_2 - 2e_3' + e_4.$$

Avem așadar:

$$u(e_1') = -e_1'$$

$$u(e_2) = -4e_1' - e_2$$

$$u(e_3') = e_3'$$

$$u(e_4) = 4e_1' + 2e_2 - 2e_3' + e_4$$

Prin urmare în baza C, endomorfismul u este reprezentat prin matricea triunghiulară

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza B la baza C este

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ se obține } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifică:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

35. Matricea A_1, admite vectorul propriu $e_1 = (1, 1)$ corespunzător valorii proprii duble $\lambda = 2$. Matricea de trecere $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ permite a obține o redusă triunghiulară. Avem:

$$B_1 = P^{-1}A_1P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ de unde } B_1^p = 2^{p-1}\begin{bmatrix} 2 & -p \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A_1^p = PB_1^pP^{-1} = 2^{p-1}\begin{bmatrix} p+2 & -p \\ p & 2-p \end{bmatrix}.$$

Matricea A_2 admite vectorul propriu (0, 1, 1), corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ și vectorul propriu (1, 1, 0) corespunzător valorii proprii duble $\lambda_2 = 2$. Se completează o bază prin vectorul (0, 0, 1), de unde:

$$B_2 = P^{-1}A_2P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

se deduce:

$$B_2^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{bmatrix};\quad A_2^p = \begin{bmatrix} (p+2)2^{p-1} & -p2^{p-1} & p2^{p-1} \\ (p+2)2^{p-1} - 1 & 1 - p2^{p-1} & p2^{p-1} \\ 2^p - 1 & 1 - 2^p & 2^p \end{bmatrix}$$

36. Ecuația caracteristică: $(\lambda + 1)^3 = 0$. Componentele vectorilor proprii care corespund la valoarea proprie triplă $\lambda = -1$ verifică ecuația $x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0$. Se obțin vectorii proprii (−2, 0, 1) și (−2, α, 1). Se ia pentru noua bază următorii vectori $e_1' = (-2, 0, 1)$; $e_2' = (-2, \alpha, 1)$ și $e_3' = (\lambda, \mu, \nu)$. Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza inițială. Orice bază $\{e_1', e_2', e_3'\}$ în care matricea este B, verifică $u(e_1') = -e_1'$; $u(e_2') = -e_2'$ și $u(e_3') = e_2' - e_3'$. Transformarea liniară care transformă vectorul (x_1, x_2, x_3) în vectorul (y_1, y_2, y_3) este dată de formulele

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 0x_2 + 8x_3 \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 6x_3 \\ y_3 &= 2x_1 + 0x_2 - 5x_3 \end{aligned}$$

aşadar

$$\begin{aligned} y_1 &= -6 + 8 = 2 \\ y_2 &= -6 + 6 = 0 \\ y_3 &= 4 - 5 = -1 \end{aligned}$$

deci $u(e_1') = (2, 0, -1)$; $u(e_2') = (2, -\alpha, -1)$; $u(e_3') = (3\lambda + 8\nu, 3\lambda - \mu + 6\nu, -2\lambda - 5\nu)$ aşadar $(3\lambda + 8\mu, 3\lambda - \mu + 6\nu, -2\lambda - 5\nu) = (-2 - \lambda, \alpha - \mu, 1 - \nu)$, de unde:

$$\begin{aligned} 3\lambda + 8\nu &= -2 - \lambda \\ 3\lambda - \mu + 6\nu &= \alpha - \mu \\ -2\lambda - 5\nu &= 1 - \nu \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2\lambda + 4\nu &= -1 \\ 3\lambda + 6\nu &= \alpha \\ -2\lambda - 4\gamma &= 1 \end{aligned}$$

se alege $\mu = 0$ și $\nu = 0$ și se obține $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\alpha = -\frac{3}{2}$. Matricea de trecere este aşadar:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix},\ \text{rezultă}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

37. Ecuația caracteristică este $(\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$. Pentru valoarea proprie $\lambda = -3$ se obține vectorul propriu $e_1' = (2, -1, -1)$. Pentru valoarea proprie dublă $\lambda = 1$ se obține vectorul propriu $e_2' = (-4, 1, 2)$; așadar sub-spațiul propriu generat de acest vector este unidimensional deci matricea nu este diagonalizabilă. Se alege ca vectori de bază e_1', e_2' și un al treilea vector $e_3'(\lambda, \mu, \nu)$ astfel ca $u(e_3') = e_2' + e_3'$. Dar $u(e_3') = (13\lambda + 16\mu + 16\nu, -5\lambda - 7\mu - 6\nu, -6\lambda - 8\mu - 7\nu)$ și $e_2' + e_3' = (\lambda - 4, \mu + 1, \nu + 2)$. Așadar avem $(13\lambda + 16\mu + 16\nu, -5\lambda - 7\mu - 6\nu, -6\lambda - 8\mu - 7\nu) = (\lambda - 4, \mu + 1, \nu + 2)$ de unde rezultă sistemul : $3\lambda + 4\mu + 4\nu = -1$, $5\lambda + 8\mu + 6\nu = -1$. Rezolvînd în raport cu necunoscutele λ și μ se obține $\lambda = -1 - 2\nu$, $\mu = \frac{1+\nu}{2}$, dacă se ia $\nu = 1$ se obține vectorul $e_3' = (-3, 1, 1)$. Așadar matricea de trecere este :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ se deduce } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Așadar

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

38. Ecuația caracteristică $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$. Pentru $\lambda = 2$ se obține vectorul propriu $e_1' = (0, 2, 1)$. În cazul valorii proprii duble se obțin ecuațiile

$$x_2 - 2x_3 = 0 \quad \text{și} \quad x_2 - 3x_3 = 0,$$

verificate de vectorul $e_2' = (1, 0, 0)$. Sub-spațiul propriu generat de vectorul $e_2' = (1, 0, 0)$ este unidimensional deci endomorfismul nu este diagonalizabil. Se poate triunghiulariza luînd ca vectori de bază vectorii $e_1' = (0, 2, 1)$, $e_2' = (1, 0, 0)$ și un vector arbitrar de exemplu $e_3' = (0, 0, 1)$. Se obține matricea de trecere :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ se deduce } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Așadar

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

39. Ecuația caracteristică $(\lambda + 1)^3 = 0$, deci o valoare proprie triplă $\lambda = -1$, la care corespunde un plan al vectorilor proprii de ecuație $x_1 + 2x_3 = 0$. Diagonalizarea este imposibilă. Se poate reduce la forma

Scanned with OKEN Scanner

triunghiulară luînd ca bază vectorii $e_1' = (2, 0, -1)$; $e_2' = (0, 1, 0)$, care aparţin planului precedent şi un vector arbitrar $e_3' = (0, 0, 1)$. Aşadar matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ rezultă } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aşadar

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

40. Ecuaţia caracteristică $(\lambda - 1)^4 = 0$, $\lambda = 1$ este o valoare proprie quadruplă. Pentru $\lambda = 1$, componentele vectorilor proprii verifică ecuaţiile: $2x_1 + x_2 = 0$; $7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; $17x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Subspaţiul propriu asociat este cu două dimensiuni. Vectorii proprii $(0, 0, 1, -1)$ şi $(1, -2, 0, -5)$ formează o bază. Matricea A nu este deci diagonalizabilă. Fie (e_1', e_2', e_3', e_4') baza în care matricea este B. Se ia ca vector e_1', vectorul propriu $(0, 0, 1, -1)$. Dacă $e_2' = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, avem în acest caz $u(e_2') = e_1' + e_2'$. Deoarece

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ y_2 &= -4x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ y_3 &= 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_4 &= -17x_1 - 6x_2 - x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Aşadar $u(e_2') = (3\alpha + \beta, -4\alpha - \beta, 7\alpha + \beta + 2\gamma + \delta, -17\alpha - 6\beta - \gamma)$ va trebui să avem:

$$(3\alpha + \beta, -4\alpha - \beta, 7\alpha + \beta + 2\gamma + \delta, -17\alpha - 6\beta - \gamma) = (\alpha, \beta, 1 + \gamma, -1 + \delta).$$

Rezultă $2\alpha + \beta = 0$; $7\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$; $17\alpha + 6\beta + \gamma + \delta = 1$. Ecuaţiile independente sînt: $2\alpha + \beta = 0$; $7\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ se poate alege soluţia $(1, -2, -4, 0)$, aşadar $e_2' = (1, -2, -4, 0)$. Se ia pentru $e_3' = (1, -2, 0, -5)$, al doilea vector propriu. Se alege $e_4' = (a, b, c, d)$ astfel ca $u(e_4') = e_3' + e_4'$, se obţine:

$$(3a + b, -4a - b, 7a + b + 2c + d, -17a - 6b - c) = (1 + a, b - 2, c, d - 5)$$

Rezultă: $2a + b = 1$; $7a + b + c + d = 0$, $17a + 6b + c + d = 5$. Ecuaţiile independente sînt: $2a + b = 1$; $7a + b + c + d = 0$; $a = 0$; $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$, aşadar $e_4' = (0, 1, 0, -1)$.

Aşadar matricea de trecere de la baza dată la baza (e_1', e_2', e_3', e_4') este:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 28 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Așadar

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 28 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

41. 1) Ecuația caracteristică : $(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$. Pentru $\lambda=2$ corespunde vectorul propriu unidimensional $V_1=(1,\ 1,\ 1)$. Pentru valoarea proprie dublă $\lambda=4$ corespunde vectorul propriu unidimensional $V_2=(1,\ -1,\ 1)$ deci matricea A nu este diagonalizabilă. Se poate reduce la forma triunghiulară, luînd ca vectori de bază vectorii V_1, V_2 și un alt vector de exemplu al treilea vector e_3 al bazei canonice a lui $\mathbf{R}^3$. Așadar matricea de trecere este :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\text{; se obține } P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$B=P^{-1}AP=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Matricea C este în acest caz : $C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Aceasta va fi matricea aplicației u asociate matricei A, dacă baza lui $\mathbf{R}^3$ este formată din vectorii V_1 și V_2 (sau din vectori proporționali) și dintr-un vector V_3 în așa fel ca $u(V_3)=4V_3+V_2$ (termenii ultimii coloane ai matricei C sînt componentele în baza aleasă a lui $\mathbf{R}^3$, al transformatei prin u al celui de-al treilea vector al bazei).

Scanned with OKEN Scanner

Avem : $y_1 = 8x_1 - x_2 - 5x_3$; $y_2 = -2x_1 + 3x_2 + x_3$;

$y_3 = 4x_1 - x_2 - x_3$ și $V_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$. Rezultă
$u(V_3) = (8\alpha - \beta - 5\gamma, -2\alpha + 3\beta + \gamma, 4\alpha - \beta - \gamma)$. Așadar
$(8\alpha - \beta - 5\gamma, -2\alpha + 3\beta + \gamma, 4\alpha - \beta - \gamma) =$
$= 4(\alpha, \beta, \gamma) + (1, -1, 1)$.

Se deduce sistemul :

$$\begin{aligned} 8\alpha - \beta - 5\gamma &= 4\alpha + 1 \\ -2\alpha + 3\beta + \gamma &= 4\beta - 1 \\ 4\alpha - \beta - \gamma &= 4\gamma + 1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 4\alpha - \beta - 5\gamma &= 1 \\ -2\alpha - \beta + \gamma &= -1 \end{aligned}$$

Acest sistem admite în particular soluția $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{3}$; $\gamma = 0$.

Așadar $V_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. Rezultă matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ se obține } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

De unde

$$C = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Se obține

$$C^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

se știe că aplicația inelului matricelor pătrate de ordinul 3 în el însuși definit prin : $M \to PMP^{-1}$ este un izomorfism de inele ; prin urmare :

$$A = PCP^{-1} \to A^n = PC^nP^{-1}.$$

Matricele P și C^n sînt cunoscute, deci P^{-1} și A^n se calculează ușor.

42. Ecuația caracteristică este $(1 - \lambda)(2 - \lambda)^3 = 0$. Sub-spațiul propriu asociat valorii proprii $\lambda = 1$ este unidimensional, vectorul de bază fiind $v_1 = (1, 1, -4, -1)$. Sub-spațiul propriu asociat valorii proprii $\lambda = 2$, care

Scanned with OKEN Scanner

este rădăcină multiplă de ordinul trei este unidimensional, vectorul de bază fiind $v_2 = (0, 1, 0, 1)$. Matricea lui Jordan J, asemenea matricei A este de forma

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se știe că matricea $P^{-1}AP$ este matricea endomorfismului u a lui $\mathbf{R}^4$, în baza formată din vectorii coloane P_1, P_2, P_3, P_4 ai matricei P. Matricea $P^{-1}AP$ va fi matricea J dacă P_1 și P_2 sînt vectorii proprii ai lui u, de exemplu vectorii $v_1 = (1, 1, -4, -1)$ și $v_2 = (0, 1, 0, 1,)$. P_3 și P_4 sînt transformați prin u în $P_2 + 2P_3$ și $P_3 + 2P_4$, aceștia sînt deci soluții ale ecuațiilor.

1) $AP_3 = 2P_3 + P_2$ și 2) $AP_4 = 2P_4 + P_3$.

Dacă

$$P_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \text{ și } P_4 = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{bmatrix}$$

Ecuațiile 1) și 2) devin:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\alpha \\ -\alpha + 4\beta + \gamma - 2\delta &= 2\beta + 1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma - \delta &= 2\gamma \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= 2\delta + 1 \end{aligned} \quad \text{și} \quad \begin{aligned} \alpha' &= 2\alpha' \\ -\alpha' + 4\beta' + \gamma' - 2\delta' &= 2\beta' \\ 2\alpha' + \beta' + 2\gamma' - \delta' &= 2\gamma' + 1 \\ \alpha' + 2\beta' + \gamma' &= 2\delta' \end{aligned}$$

care rezolvate ne dau componentele vectorilor P_3 și P_4. Se obține $P_3 = (0, 0, 1, 0)$ și $P_4 = (0, 1, -2, 0)$. Matricea de trecere este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ se deduce } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se arată prin recurență asupra lui n, că dacă $n > 2$

$$J^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

dar: $A^n = PJ^nP^{-1}$, se obține:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-2^n-n(n-1)2^{n-2} & (n+1)2^n+n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n-n(n-1)2^{n-3} \\ -4-n2^n+2^{n+2} & n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ -1+2^n-n(n-1)2^{n-2} & n2^n+n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -(n-1)2^n-n(n-1)2^{n-3} \end{bmatrix}$$

43. Fie A o matrice simetrică de ordinul n, și λ o valoare proprie pe care o presupunem complexă. $\lambda = \alpha + i\beta$.

Fie X vectorul propriu complex corespunzător și X^* vectorul complex cu componentele, conjugatele componentelor lui X. Așadar

$$X = \begin{bmatrix} a_1+ib_1 \\ a_2+ib_2 \\ \vdots \\ a_n+ib_n \end{bmatrix} \text{ și } X^* = \begin{bmatrix} a_1-ib_1 \\ a_2-ib_2 \\ \vdots \\ a_n-ib_n \end{bmatrix}$$

Între matricea A, vectorul propriu X și valoarea proprie λ avem relația:

1) $AX = \lambda X$, înmulțind în stînga cu ${}^tX^*$ rezultă

2) ${}^tX^*AX = \lambda {}^tX^*X$, dar

$${}^tX^*X = [a_1 - ib_1 a_2 - ib_2 \; a_n - ib_n] \begin{bmatrix} a_1+ib_1 \\ a_2+ib_2 \\ \vdots \\ a_n+ib_n \end{bmatrix} =$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2 = N$$

Adică ${}^tX^*X = N$ (real), așadar

3) ${}^tX^*AX = \lambda N$, dacă în 3) schimbam numerele complexe cu conjugatele lor, rezultă

4) ${}^tXAX^* = \lambda^* N$, luînd transpusa în membrul întîi avem:

$${}^tX^*{}^tAX = \lambda^* N, \text{ dar } {}^tA = A$$

deci ${}^tX^*AX = \lambda^* N$, comparînd cu 3) rezultă

$$\lambda N = \lambda^* N \text{ deci } \lambda = \lambda^* \text{ sau } \alpha + i\beta = \alpha - i\beta$$

deci $2i\beta = 0$; $\beta = 0$, așadar $\lambda = \alpha$, adică λ este real. Valorilor proprii λ_1 și λ_2 le corespund vectorii proprii:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{bmatrix}; \; X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}, \text{ avem}$$

$AX^{(1)} = \lambda_1 X^{(1)}$ și $AX^{(2)} = \lambda_2 X^{(2)}$. Înmulțim prima ecuație în stînga cu ${}^tX^{(2)}$ și a doua în stînga cu ${}^tX^{(1)}$. Rezultă:

1) ${}^tX^{(2)}AX^{(1)} = \lambda_1 {}^tX^{(2)}X^{(1)}$; ${}^tX^{(1)}AX^{(2)} = \lambda_2 {}^tX^{(1)}X^{(2)}$

Luînd transpusele produselor în ambii membri avem:

${}^tX^{(1)}{}^tAX^{(2)} = \lambda_1 {}^tX^{(1)}X^{(2)}$; ${}^tX^{(2)}{}^tAX^{(1)} = \lambda_2 {}^tX^{(2)}X^{(1)}$

dar cum ${}^tA = A$ rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

2) ${}^tX^{(1)}AX^{(2)} = \lambda_1 {}^tX^{(1)}X^{(2)}$; ${}^tX^{(2)}AX^{(1)} = \lambda_2 {}^tX^{(2)}X^{(1)}$

din 1) și 2) se deduce : $\lambda_1 {}^tX^{(2)}X^{(1)} = \lambda_2 {}^tX^{(2)}X^{(1)}$ sau $(\lambda_1 - \lambda_2){}^tX^{(2)}X^{(1)} = 0$ cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$ rezultă

$$ {}^tX^{(2)}X^{(1)} = 0 \text{ sau } {}^tX^{(2)}X^{(1)} = [x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2] \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^1 x_1^2 + x_2^1 x_2^2 + \quad + x_n^1 x_n^2 = [X^{(1)},\ X^{(2)}] = 0$$

adică produsul scalar al vectorilor n dimensionali $X^{(1)}$ și $X^{(2)}$ este nul, deci direcțiile proprii definite de vectorii $X^{(1)}$ și $X^{(2)}$ sînt perpendiculare.

44. Se numește matrice hermitiană, o matrice pătrată ale cărei elemente sînt numere complexe, și care este egală cu conjugata transpusei sale : $A = {}^tA^*$. Așadar $a_i^j = a_j^{i*}$, pentru elementele care se află pe diagonala principală avem $a_i^i = a_i^{i*}$, deci elementele de pe diagonala principală sînt numere reale. Dacă o matrice hermitiană are toate elementele reale ea se reduce la o matrice simetrică.

Fie λ o valoare proprie a matricei hermitiene A, la această valoare proprie corespunde vectorul propriu X diferit de zero, care satisface ecuația :

$$1)\ AX = \lambda X$$

dacă $\lambda = \alpha + i\beta$, atunci X este complex și avem

$$X = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix};\ {}^tX^* = [a_1 - ib_1\ a_2 - ib_2 \ldots a_n - ib_n]$$

Înmulțind 1) în stînga cu ${}^tX^*$ rezultă :

${}^tX^*AX = \lambda {}^tX^*X$, dar ${}^tX^*X = N$ (real) deci 2) ${}^tX^*AX = \lambda N$, dacă în 2) se înlocuiesc numerele complexe cu conjugatele lor se obține 3) ${}^tXA^*X^* = \lambda^* N$, transpunînd membrul întîi rezultă

$${}^tX^{*t}A^*X = \lambda^* N,$$

dar ${}^tA^* = A$ deci rezultă 4) ${}^tX^*AX = \lambda^* N$, comparînd 4) cu 2) rezultă : $\lambda^* N = \lambda N$, de unde $\lambda = \lambda^*$ sau $\alpha + i\beta = \alpha - i\beta$; $2i\beta = 0$ deci $\lambda = \alpha$ rezultă deci că valorile proprii ale unei matrici hermitiene sînt reale. La două valori proprii diferite λ_1 și λ_2 corespund respectiv vectorii proprii diferiți de 0, $X^{(1)}$ și $X^{(2)}$, aceștia satisfac ecuațiilor

$$AX^{(1)} = \lambda_1 X^{(1)};\ AX^{(2)} = \lambda_2 X^{(2)}$$

se înmulțește prima în stînga cu ${}^tX^{(2)*}$ și a doua analog cu ${}^tX^{(1)*}$ rezultă :

1) ${}^tX^{(2)}AX^{(1)} = \lambda_1 {}^tX^{(2)*}X^{(1)}$; ${}^tX^{(1)*}AX^{(2)} = \lambda_2 {}^tX^{(1)*}X^{(2)}$

Aceste două relații antrenează pe următoarele între matricele conjugate, λ_1 și λ_2 fiind reale

$${}^tX^{(2)}A^*X^{(1)*} = \lambda_1 {}^tX^{(2)}X^{(1)*}\ \ {}^tX^{(1)}A^*X^{(2)*} = \lambda_2 {}^tX^{(1)}X^{(2)*}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin transpunere rezultă :

2) ${}^tX^{(1)}*{}^tA*X^{(2)} = \lambda_1 {}^tX^{(1)}*X^{(2)}$ și ${}^tX^{(2)}*{}^tA*X^{(1)} = \lambda_2 {}^tX^{(2)}*X^{(1)}$

comparînd 1) și 2) și ținînd seamă de faptul că matricea este hermetiană, adică ${}^tA^* = A$, se obține

$$\lambda_1 {}^tX^{(2)}*X^{(1)} = \lambda_2 {}^tX^{(2)}*X^{(1)} \quad \text{sau} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)[{}^tX^{(2)}*X^{(1)}] = 0$$

deci ${}^tX^{(2)}*X^{(1)} = 0$, analog ${}^tX^{(1)}*X^{(2)} = 0$.

45. Dacă A este diagonalizabilă, matricea A^2 este diagonalizabilă în aceeași bază. Matricea B este o matrice simetrică reală ea este efectiv diagonalizabilă, valorile sale proprii sînt date de $\det(B - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 16) = 0$. Vectorii proprii pe care îi vom lua unitari (în $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu structura sa euclidiană naturală) sînt după calcule imediate :

$$\lambda = 0 \to x_1 = x_2 - x_3 = 0 \quad \text{fie } e_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lambda = 1 \to x_1 = x_2 = -x_3 \quad \text{fie } e_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\lambda = 16 \to \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{1} \quad \text{fie } e_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

se notează cu

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

matricea de trecere, care este o matrice ortogonală deci :

$${}^tP = P^{-1}, \quad P^{-1}A^2P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Matricea A diagonalizează necesar în aceeași bază, valorile sale proprii sînt deci $0, \pm 1, \pm 4$. A este deci una din cele patru matrice

$$A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4\varepsilon' \end{bmatrix} P^{-1}; \quad (\varepsilon = \pm 1; \ \varepsilon' = \pm 1)$$

După efectuarea calculelor se obține :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \varepsilon + 8\varepsilon' & \varepsilon - 4\varepsilon' & -\varepsilon + 4\varepsilon' \\ \varepsilon - 4\varepsilon' & \varepsilon + 2\varepsilon' & -\varepsilon - 2\varepsilon' \\ -\varepsilon + 4\varepsilon' & -\varepsilon - 2\varepsilon' & \varepsilon + 2\varepsilon' \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Adică :

$$A_1=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};\quad A_2=-A_1;\ A_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix};\quad A_4=-A_3.$$

46. Inversa unei matrici pătrate A, poate fi calculată, folosind teorema lui Cayley-Hamilton în modul următor, conform teoremei rezultă :

1) $A^n+\alpha_1A^{n-1}+\alpha_2A^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI=0$

unde I este matricea unitate de ordinul n și 0 matricea nulă de ordinul n. Înmulțind ambii membri ai ecuației 1) în dreapta cu A^{-1} rezultă :

$$(A^n+\alpha_1A^{n-1}+\alpha_2A^{n-2}+\quad+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI)A^{-1}=0$$

sau

$$A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+\alpha_2A^{n-3}+\quad+\alpha_{n-1}AA^{-1}+\alpha_nIA^{-1}=0$$

dar cum $AA^{-1}=I$ și $IA^{-1}=A^{-1}$ rezultă :

2) $A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+\alpha_2A^{n-3}+\quad+\alpha_{n-1}I+\alpha_nA^{-1}=0$

Așadar

$$A^{-1}=-\frac{1}{\alpha_n}(A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+\alpha_2A^{n-3}+\alpha_{n-1}I)$$

a) Se calculează puterile succesive ale matricei A, urmele lor și coeficienții ecuației caracteristice :

$$A^2=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix} 49 & 17 & 20 \\ 34 & 10 & 16 \\ 19 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$s_1=\operatorname{tr}A=3$; $\alpha_1=-3$; $s_2=\operatorname{tr}A^2=19$; $\alpha_2=\frac{1}{2}(-9+19)=-5$

$s_3=\operatorname{tr}A^3=66$; $\alpha_3=-\frac{1}{3}(-15-57+66)=2$. Avem atunci :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}-5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

b) se obține în mod analog :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Va trebui calculate puterile 2, 3 și 4 ale matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obține:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 15 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 143 & 93 & 33 & 18 \\ 33 & 21 & 13 & 7 \\ 93 & 63 & 21 & 12 \\ 18 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}; A^4 = \begin{bmatrix} 814 & 528 & 204 & 111 \\ 204 & 138 & 49 & 28 \\ 528 & 342 & 138 & 75 \\ 111 & 75 & 28 & 16 \end{bmatrix}$$

Calculele pot fi efectuate folosind sub-matricele.
Urmele matricelor și coeficienții ecuației caracteristice sînt:

$s_1 = 6$ $\quad \alpha_1 = -6$

$s_2 = 38$ $\quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}(-36 + 38) = -1$

$s_3 = 189$ $\quad \alpha_3 = -\frac{1}{3}(-6 - 6 \times 38 + 189) = 15$

$s_4 = 1\,106$ $\quad \alpha_4 = -\frac{1}{4}(6 \times 15 - 38 - 6 \times 189 + 1\,106) = -6$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 143 & 93 & 33 & 18 \\ 33 & 21 & 13 & 7 \\ 93 & 63 & 21 & 12 \\ 18 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 25 & 15 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 15 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 15\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

CAPITOLUL II

CALCULUL FUNCȚIILOR PRIMITIVE. INTEGRAREA PRIN SUBSTITUȚII

47. $\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$. 48. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}$. 49. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$.

50. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$. 51. $\int \frac{x^n dx}{ax^{n+1} + b} = \frac{1}{a(n+1)} \int \frac{a(n+1)x^n dx}{ax^{n+1} + b} =$

$= \frac{1}{a(n+1)} \ln |ax^{n+1} + b|$.

Scanned with OKEN Scanner

52. $\int \sqrt[3]{x^3-4x+1}\ (3x^2-4)dx = \int \sqrt[3]{t}\,dt$ unde $t = x^3-4x+1$; rezultă $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^3-4x+1)^4}$.

53. $\sqrt{1+x^3} = t$, $x^3+1 = t^2$ $3x^2\,dx = 2t\,dt$ și $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int t^2\,dt = \frac{2}{9}t^3 = \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}$.

54. $-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$. **55.** $x^4+a^4 = t^2$ $3x^2\,dx = 2t\,dt \to \frac{2}{3}\int\frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3}\sqrt{x^4+a^4}$. **56.** $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt \to \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1}$.

57. $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \Rightarrow -\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$ $(a \neq \pm b)$.

58. $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \to \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{(2a-b)}$ $(a \neq \pm b)$.

59. $-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$ $(a \neq \pm b)$.

60. $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$, $-\int\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2 t}$.

61. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x$.

62. $\sin x = t$, $\int\frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}x}$, $(n \neq 1)$.

63. $e^{\sin x}$. **64.** $\sqrt{x} = t$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \to \int 2e^t\,dt = 2e^{\sqrt{x}}$.

65. $\ln x = t$. $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

66. $\ln x = t \to \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$ și $\ln|\ln x|$ cînd $n = -1$.

67. $\operatorname{arc\,tg} e^x$. **68.** $\ln(1+e^x)$.

69. $\int\frac{x\,dx}{\ln(x^{x^2})} = \int\frac{x\,dx}{x^2\ln x} = \int\frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|$ v. 66.

70. $-\frac{1}{\ln|x|}$. **71.** $\ln x = t \to \frac{-1}{2(1+\ln x)^2}$. **72.** $\operatorname{arctg}(\sin x)$.

Scanned with OKEN Scanner

73. $\cos x = t, -\int \frac{2t\,dt}{1+t^2} = -\ln(1+\cos^2 x)$. **74.** $\ln\sqrt{3x^2-2x+5}$.

75. $\ln x = t, \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(\ln x)$. **76.** $\sin(\ln x)$. **77.** $2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}$.

78. $-2\ln\left(1+\cos^2\frac{x}{2}\right)$. **79.** $\ln\sqrt{x+\sin x}$. **80.** $\frac{1}{2}e^{1+x^2}$.

81. $\int e^{2x^2+\ln x}dx = \int e^{2x^2}\cdot e^{\ln x}\,dx = \int e^{2x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}e^{2t} =$

$= \frac{1}{4}e^{2x^2}$; unde $t = x^2$.

82. $-\mathrm{ctg}\,x + \frac{2}{\sin x}$. **83.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\int \frac{d(1+2\cos x)}{2\sqrt{1+2\cos x}} = -$

$-\sqrt{1+2\cos x}$.

84. $\cos x = t \to -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}$. **85.** $\int \frac{x^6\cdot x^2 dx}{(1+x^3)^3}$; $1+x^3 =$

$= t \to \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{3}\left(\ln|t| + \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) = \ln|\sqrt[3]{1+x^3}| + \frac{1}{6}\,\frac{4x^3+3}{(1+x^3)^2}$.

86. $x^4 = t$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-1}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{4}\ln(t+\sqrt{t^2-1}) =$

$= \frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8-1})$.

87. $x^n = t, \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}dx = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{1}{n}\arcsin\frac{t}{a} = \frac{1}{n}\arcsin\frac{x^n}{a}$.

88. $e^x = t \to \int \frac{(t+1)dt}{t(t^2+1)} = \int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t(t^2+1)} = \mathrm{arctg}\,t + \int \frac{(1+t^2-t^2)dt}{t(t^2+1)} =$

$= \mathrm{arctg}\,t + \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \mathrm{arctg}\,e^x + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$.

89. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\,e^x$, $(e^x = t)$.

90. $e^x = t \to \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin e^x$.

91. $x = \frac{1}{t}$; $dx = -\frac{dt}{t^2} \to -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t = \arccos\frac{1}{x}$.

92. $x^n = \frac{1}{t^2}$; $nx^{n-1}dx = -\frac{2dt}{t^3}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}} = \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n\sqrt{x^n-1}} = -\frac{2}{n}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$= \frac{2}{n}\arccos\frac{1}{\sqrt{x^n}}$.

Scanned with OKEN Scanner

93. $\sqrt{1-x^2}=t \to -\int \frac{t^2dt}{1-t^2}=-\int \frac{t^2-1+1}{1-t^2}\,dt=\int dt-\int \frac{dt}{1-t^2}=$

$=t-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$ unde $t=\sqrt{1-x^2}$ (s-a aplicat formula 38).

94. $\sqrt{x}=t,\ x=t^2 \to \int \frac{2tdt}{2+t}=2\int \frac{t+2-2}{2+t}\,dt=2\int dt-4\int \frac{dt}{2+t}=$

$=2t-4\cdot\ln(2+t)=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

95. $\sqrt{x}=t \to \frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln(1+t)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}-$

$-2\cdot\ln(1+\sqrt{x})$.

96. $\int \frac{dx}{x(ax^n+b)}=\int \frac{x^{n-1}dx}{x^n(ax^n+b)}$ se face $x^n=t$

$nx^{n-1}dx=dt \to \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t(at+b)}=\frac{1}{nb}\left[\int \frac{dt}{t}-\int \frac{adt}{at+b}\right]=\frac{1}{nb}[\ln|t|-\ln|at+$

$+b|]=\frac{1}{nb}\ln|x^n|-\ln|ax^n+b|=\frac{1}{nb}\ln\left|\frac{x^n}{ax^n+b}\right|$.

97. Se face $x=\frac{1}{t}$; $dx=-\frac{dt}{t^2}$ și integrala devine $-\int \sqrt[3]{t^2-1}t\,dt$. etc.

98. $\sqrt{e^x-1}=t,\ e^x-1=t^2,\ e^xdx=2t\,dt$ și $\int \frac{e^xdx}{(3-e^x)\sqrt{e^x-1}}=$

$=2\int \frac{tdt}{t(t^2+4)}=\operatorname{arctg}\frac{t}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}$.

99. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx=\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2-1+\frac{1}{x^2}}}\,dx$ $x\neq 0$ se face $x-\frac{1}{x}=t$,

$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=dt,\ x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2 \to \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln(t+\sqrt{t^2+1})=$

$=\operatorname{argsh} x$ (v. formula 31).

100. $\sqrt{2x-1}=t;\ 2x-1=t^2;\ dx=t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}=\int \frac{tdt}{\frac{t^2+1}{2}t}=2\operatorname{arctg}t=2\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}.$$

101. $\sqrt{x}=t \to \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

102. $t=x^{\frac{3}{2}} \to \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{a^3-t^2}}=\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$

Scanned with OKEN Scanner

103. $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}x^5dx$, se face $1+x^6=t^2 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-1+\sqrt{1+x^6}}{1+\sqrt{1+x^6}}\right|\right)$. (v. formula 36).

104. $(x=a\sin^2 t$, căci $0<x<a) \rightarrow \sqrt{x(a-x)}+a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}$.

105. $\sqrt{a+x}=t \rightarrow \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{3}{2}}\left(x^2-\frac{4ax}{5}+\frac{8a^2}{15}\right)$.

106. $x=\operatorname{tg} t$, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$ și se obține $\int\frac{\cos t\,dt}{2\sin t-1}=\frac{1}{2}\ln|2\cdot\sin t-1|$.

107. $x=\cos\varphi+z\sin\varphi$; $dx=\sin\varphi\,dz$, de unde

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}=\int\frac{\sin\varphi\,dz}{\sqrt{\sin^2\varphi+z^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\ln(z+\sqrt{1+z^2})=$$

$$=\ln(x-\cos\varphi+\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}).$$

108. $\frac{1}{x}=t\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx=\cos\frac{1}{x}$.

109. $\ln x=t;\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{dt}{t\ln t}=\ln|\ln(\ln x)|$, .

110. $\arcsin x=t \rightarrow \frac{1}{(n-1)\,(\arcsin x)^{n-1}}$.

111. $\sin x-\cos x=t$, $(\cos x+\sin x)dx=dt$, deci

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[n]{\sin x-\cos x}}=\int\frac{dt}{\sqrt[n]{t}}=\frac{n}{n-1}(\sin x-\cos x)^{\frac{n-1}{n}}\quad n\neq 1.$$

112. $\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\int\frac{dx}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-5}\right|$, (formula 39).

113. $\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$ (formula 27).

114. $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

115. $\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2\cos\alpha+2\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}dx+\cos\alpha\int\frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+$$

$$+1)+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

116. $x^n = u \to \frac{2}{n\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^n + 1}{\sqrt{3}}$.

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3}$.

118. $x = \frac{1}{\sin t} \to \frac{\cos^3 t}{3}$ unde $t = \arcsin \frac{1}{x}$ sau se face

$$x = \operatorname{ch} t \to \frac{t^3}{3} \text{ unde } t = \operatorname{arg ch} x.$$

119. $x = \operatorname{tg} t$; $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, deci

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos t \, dt = \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

120. Se face $x = a \operatorname{tg} t$ și $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{a\sqrt{a^2+x^2}}$.

121. $x = \sin t$ și $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos^5 t} = \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^4 t} dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} +$

$$+ \int \operatorname{tg}^2 t \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

122. $x = a \sin t$, $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt =$

$$= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

123. $x^2 = t$, $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}}.$$

124. $1 + e^{2x} = t^2$, $dx = \frac{t dt}{t^2 - 1}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1}.$$

125. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$.

126. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x}$ cu substituția $\operatorname{tg} x = t$

integrala devine $\int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} t \right) =$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

127. $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int x\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

(pentru ultima se face $x = \sin t$).

128. $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx = \int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, se face schimbarea

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = t,\ \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt \text{ și se obține}$$

$$\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

129. $x^3 = t$ și se obține $\frac{1}{3}\int\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt = \frac{1}{3}(\arcsin x^3 - \sqrt{1-x^6})$.

(v. exercițiul 79).

130. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

131. $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $dx = a\,\mathrm{ch}t\,dt$, deci $\int\sqrt{a^2+x^2}dx =$

$$= a^2\int\sqrt{1+\mathrm{sh}^2t}\,\mathrm{ch}t\,dt = a^2\int\mathrm{ch}^2t\,dt = a^2\int\frac{1+\mathrm{ch}2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t+\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t) = \frac{a^2}{2}\left(\mathrm{argsh}\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\text{dar } \mathrm{argsh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\right), \text{ deci}$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}.$$

132. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$, cum $1+\frac{1}{x^2}$ este derivata funcției

$x - \frac{1}{x}$ se face $x - \frac{1}{x} = t$ și se obține $\int\frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.

133. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$ se face $x + \frac{1}{x} = t$ și se obține

$$\int\frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

134. Se poate reduce la calculul integralelor precedente căci,

$$2\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx-\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx\to\int\frac{dx}{x^4+1}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

135. Analog cu **134** $2\int\frac{x^2dx}{x^4+1}=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx+\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$ etc.

136. Substituția $x^2=t$ reduce integrala la $\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$ calculată la ex. **132** și rezultă $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{2}}$.

137. Se reduce la ex. **133** dacă se face $x^2=t$, rezultă

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}.$$

138. Se reduce la **132** dacă se face $x^3=t$ și se obține

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^6-1}{x^3\sqrt{2}}.$$

139. Se reduce la **133** dacă se face $x^3=t$.

140. Este o generalizare a exercițiului **136**. Se face $x^n=t$ și rezultă

$$\frac{1}{n}\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt=\frac{1}{n\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^{2n}-1}{x^n\sqrt{2}}.$$

141. Este o generalizare a exercițiului **143** la care se reduce prin substituția $x^n=t$, obținîndu-se

$$\frac{1}{2n\sqrt{2}}\ln\frac{x^{2n}-x^n\sqrt{2}+1}{x^{2n}+x^n\sqrt{2}+1}.$$

Notă. Integralele de la **140** și **141** se puteau calcula și cu substituțiile $x^n-\frac{1}{x^n}=t$, respectiv $x^n+\frac{1}{x^n}=t$.

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

142. $u=\ln x$ $dv=dx$

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=x\ \text{deci}$$

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1).$$

143. $u=\ln x$; $dv=x^p dx$; $du=\frac{dx}{x}$; $v=\frac{x^{p+1}}{p+1}(p\neq-1)$

$$\int x^p\ln x\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x-\int\frac{x^p}{p+1}\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x-\frac{x^{p+1}}{(p+1)^2},$$

iar pentru $p=-1$ se obține $\ln|\ln x|$.

Scanned with OKEN Scanner

144. $u = x$; $dv = e^{ax}dx$; $du = dx$; $v = \frac{e^{ax}}{a}$, deci

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1).$$

145. $u = x$, $dv = a^x dx \to \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{\ln^2 a}a^x$.

146. $u = \operatorname{arctg} x$; $dv = dx$; $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $v = x$, deci

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}.$$

147. $u = x$ $dv = \sin x\,dx \to \sin x - x\cos x$.

148. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. **149.** $x \operatorname{argsh} x - \sqrt{1+x^2}$.

150. $x = u$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \to x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$.

151. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}$.

152. $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; $dv = dx$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $v = x$

$$\to x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

153. $\sin x \ln(1 + \cos x) + x - \sin x$.

154. Fie $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, integrînd prin părți se obține

$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$; ultima integrală se transformă astfel

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$$

de unde $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$; $I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

155. Se stabilește ca la exercițiul precedent formula

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

156. Înainte de a integra prin părți se face schimbarea de variabilă $x^3 = t$ se obține

$$\frac{x^3+1}{3}\ln|x^3 + 1| + \frac{x^3 - 1}{3}\ln|x^3 - 1| - \frac{2}{3}x^3.$$

157. Punînd $u = x^2$; $dv = e^{2x}dx$, avem

$$\int x^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int e^{2x}x\,dx.$$

Se integrează din nou prin părți și se obține

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda precedentă se aplică la toate integralele $\int P(x)e^{ax}\,dx$ unde $P(x)$ este un polinom. După exemplul precedent se vede că primitiva este de aceeaşi formă $Q(x)e^{ax}$, unde $Q(x)$ este un polinom de acelaşi grad cu $P(x)$. Practic se poate utiliza acest rezultat determinînd pe Q prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

158. Folosind remarca precedentă, primitiva va fi de forma $(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$. Derivînd şi identificînd cu expresia dată se obţine $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$, $c = -\frac{7}{4}$, $d = -\frac{1}{8}$.

159. $\int e^x\cos^2 x\,dx = \int e^x \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$, se integrează prin părţi se obţine

$$\frac{1}{10}e^x(5 + 2\sin 2x + \cos 2x).$$

160. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ şi apoi se integrează prin părţi şi rezultă:

$$\frac{e^{-x}}{40}(3\sin 3x - \cos 3x) + \frac{3e^{-x}}{8}(\sin x - \cos x).$$

161. $\frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2})$;

162. $\frac{1}{2}\ln^2|x+1| + \frac{\ln|x+1|}{x+1} + \frac{1}{x+1}$.

163. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + x$.

164. Se face $\sqrt{x} = t$; $\int x\cos\sqrt{x}\,dx = 2\int t^3\cos t\,dt$ şi apoi se integrează prin părţi şi se obţine: $-2(6-x)\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 6(2-x)\cos\sqrt{x}$.

165. $x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x$. **166.** $x^2\mathrm{sh}\,x - 2x\,\mathrm{ch}\,x - 2\mathrm{sh}\,x$.

167. $u = \arcsin x$ $dv = \frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$v = \int \frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$; pentru calculul lui v se face $x = \sin t$.

$v = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x$; deci

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x|.$$

168. $(x+1)\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$. **169.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\ln|x+1|$.

170. $u = \mathrm{arctg}\,x$; $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \sqrt{1+x^2}$ deci

$$\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

171. $u = \operatorname{arctg} x$ $dv = \frac{x^4 dx}{1+x^2}$ $v = \int\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$ rezultă:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2).$$

172. $u = \arcsin x$; $dv = \frac{2x dx}{(1+x^2)^2}$; $v = -\frac{1}{1+x^2}$;

$$\int \frac{2x \arcsin x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\arcsin x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$ se face

$x = \sin t$ şi $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$ în care făcînd

$\operatorname{tg} t = u$ se obţine:

$$-\frac{\arcsin x}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

173. $\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$.

174. $x \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

175. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

176 şi 177. Se notează $A = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ şi $B = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ se integrează prin părţi şi se obţin ecuaţiile

$$Aa - Bb = e^{ax}\cos bx$$

$$Ab + Ba = e^{ax}\sin bx \text{ din care rezultă:}$$

$$A = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx);\quad B = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

Altfel: $A + iB = \int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)dx =$

$$\int e^{ax}e^{ibx}dx = \int e^{(a+bi)x}dx = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x} =$$

$$= \frac{1}{a+bi}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) \text{ etc.}$$

178—179. $A = \int xe^x\cos^2 x\,dx$ şi $B = \int xe^x\sin^2 x\,dx$

$$A + B = \int xe^x dx = (x-1)e^x \text{ şi}$$

$$A - B = \int xe^x\cos 2x\,dx = \frac{xe^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} -$$

$$-\frac{e^x}{25}(4\sin 2x - 3\cos 2x);$$ din cele două ecuaţii rezultă A şi B

180. $u = \ln(\sin x)$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$; rezultă $-x - \operatorname{ctg} x \ln|\sin x|$

181. $\operatorname{tg} x(\ln|\operatorname{tg} x| - 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

182. $u = x$, $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$, rezultă $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

183. $\sin x \ln|\operatorname{ctg} x| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$.

184. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x \ln|\operatorname{tg} x|$.

185—186. $A = \int e^{\arcsin x} dx$, $B = \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Integrînd A prin părți obținem

$$A = x e^{\arcsin x} - B$$

și apoi integrăm pe B și obținem

$$B = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + A \text{ de unde}$$

$$A = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1-x^2})\, e^{\arcsin x}$$

$$B = \frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) e^{\arcsin x}$$

187—188. $A = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$, $B = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

Integrînd A și B prin părți obținem sistemul

$$A - B = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$A + B = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \text{ etc.}$$

189. $-e^{-x}\arcsin e^x + x - \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}})$.

190. $u = \operatorname{arcsec}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $du = \frac{\sqrt{2}\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$v = -\sqrt{1-x^2}$, se obține $-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsec}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} + 2\operatorname{arctg} x$.

191. $\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x - \arcsin x$.

192. $\frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

193. $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$.

194. $\sqrt[3]{x} = t$ se integrează apoi prin părți de două ori și se obține

$$3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

INTEGRAREA PRIN RELAȚII DE RECURENȚĂ

195. $u = x^n$ $dv = e^x dx$; rezultă relația:

$$I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx; \text{ deci}$$

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$
$$I_{n-1} = x^{n-1} e^x - (n-1) I_{n-2}$$
$$I_{n-2} = x^{n-2} e^x - (n-2) I_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2$$
$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1$$
$$I_1 = x e^x - e^x.$$

Se înmulțește prima egalitate cu 1, a doua cu $-n$, a treia cu $n(n-1)$, a $(p+1)^a$ cu $(-1)^p\ n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ etc. și apoi se adună membru cu membru aceste egalități și se obține relația:

$$I_n = (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - + \ldots + (-1)^n n!)e^x$$

sau $I_n = (x^n - A_n^1 x^{n-1} + A_n^2 x^{n-2} - + \ldots + (-1)^n A_n^n)e^x$

196. $u = \ln^n x$, $dv = dx$ rezultă

$$I_n = x \ln^n x - nI_{n-1}$$
$$I_{n-1} = x \ln^{n-1} x - (n-1) I_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$I_3 = x \ln^3 x - 3I_2$$
$$I_2 = x \ln^2 x - 2I_1$$
$$I_1 = x \ln x - x$$

Amplificînd egalitățile cu aceiași factori ca la exercițiul precedent și însumînd se obține:

$$I_n = (\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x - \ldots + (-1)^n n!)x$$

care se reduce la rezultatul precedent dacă se face $x = e^t$, care de fapt reduce integrala

$$\int \ln^n x\ dx = \int t^n e^t\ dt.$$

197. $u = \ln^n x$, $dv = x^m$; deci

$$\int x^m \ln^n x\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x\ dx$$

sau

$$I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^{n-1} x - \frac{n-1}{m+1} I_{n-2}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_{n-2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^{n-2}x - \frac{n-2}{m+1}I_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$I_2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^2 x - \frac{2}{m+1}I_1$$

$$I_1 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{1}{m+1}\,\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Se înmulțește prima relație cu 1, a doua cu $\frac{-n}{m+1}$, a treia cu $\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}$, a $(p+1)^a$ cu $(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{(m+1)^p}$ etc. Adunînd apoi se obține:

$$I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln^n x - \frac{A_n^1}{m+1}\ln^{n-1}x + \frac{A_n^2}{(m+1)^2}\ln^{n-2}x - \ldots + (-1)^n\frac{A_n^n}{(m+1)^n}\right).$$

198. $I_n = \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ și $I_{n-1} = \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$

Integrînd pe I_{n-1} prin părți: $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$; $dv = dx$,

$$v = x, \quad du = -\frac{2(n-1)xdx}{(a^2+x^2)^n} \text{ se obține}$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}dx$$

sau

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^n}dx;$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - 2(n-1)a^2I_n$$

de unde

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

199. $I_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{2x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x.$

200. Se procedează ca la **198** și se obține

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

201. $u = x^{m-1}$, $dv = \frac{xdx}{(a^2+x^2)^n}$ și se obține

$$\int\frac{x^m dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)}\int\frac{x^{m-2}}{(a^2+x^2)^{n-1}}dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

202. $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x \cos x\,dx$; se integrează prin părți, $u=\cos^{n-1}x$, $dv = \cos x\,dx$;

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

203. $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. **204.** $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x \cos^2 x}$, se integrează prin părți $u = \frac{1}{\cos^{n-2}x}$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $du = (n-2)\frac{\sin x dx}{\cos^{n-1}x}$, $v = \operatorname{tg} x$ și se obține

$$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

205. Procedeu analog cu cel de la **204.**

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

206. $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$$I_n = -\int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx + \int \operatorname{tg}^{n-2}x d(\operatorname{tg} x), \text{ de unde}$$

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}.$$

Pentru a obține pe I_n vom considera cazurile n par și n impar.

1. Dacă n este par:

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

$$I_{n-2} = \frac{\operatorname{tg} x^{n-3}}{n-3} - I_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$I_2 = \operatorname{tg} x - x$$

deci

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x^{n-1}}{n-1} - \frac{\operatorname{tg} x^{n-3}}{n-3} + \frac{\operatorname{tg} x^{n-5}}{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}(\operatorname{tg} x - x)$$

2. Dacă n este impar, ultima egalitate va fi

$$I_3 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - I_1 \text{ unde } I_1 = -\ln|\cos x|$$

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x^{n-1}}{n-1} - \frac{\operatorname{tg} x^{n-3}}{n-3} + \frac{\operatorname{tg} x^{n-5}}{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x|\right).$$

207. Pentru n par se obține, procedînd ca la **206.**

$$I_n = \int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} x^{n-1}}{n-1} + \frac{\operatorname{ctg} x^{n-3}}{n-3} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}(\operatorname{ctg} x + x)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru n impar

$$I_n = -\frac{\operatorname{ctg} x^{n-1}}{n-1} + \frac{\operatorname{ctg} x^{n-3}}{n-3} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\sin x| \right).$$

208. Avem $I_{m;\,n} = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx$, $u = \cos^{n-1} x$ $dv = \sin^m x \cos x \, dx$; de unde printr-o integrare prin părți se obține:

$$I_{m,\,n} = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \, dx$$

însă $\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \, dx = \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx = \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx -$

$$- \int \sin^m x \cos^n x \, dx \text{ deci } I_{m,\,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,\,n-2}$$

Putem astfel micșora exponentul n pînă la zero sau 1. Se putea proceda la micșorarea exponentului m dacă se nota $u = \sin^{m-1} x$, $dv = \cos^n x \sin x \, dx$.

209. Notînd $u = x^n$; $dv = \sin x \, dx$ și integrînd prin părți se obține:

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx;$$

Pentru ultima integrală se pune $u = x^{n-1}$, $dv = \cos x \, dx$ și se obține

$$\int x^{n-1} \cos x \, dx = x^{n-1} \sin x - (n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx$$

deci

$$\int x^n \sin x \, dx = I_n = x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2}.$$

210. Se procedează ca la exercițiul **209.**

$$I_n = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) I_{n-2}.$$

211. $I_n = \int e^{ax} \cos^n x \, dx = \int e^{ax} \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx -$

$$- \int e^{ax} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx.$$

după o integrare prin părți a ultimei integrale se obține formula de recurență

$$I_n = \frac{e^{ax}}{n^2 + a^2} (a \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} I_{n-2}.$$

212. Se procedează ca la **211.**

$$I_n = \frac{e^{ax}}{n^2 + a^2} (a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} I_{n-2}.$$

213. $I_n = \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(a + b \cos x)^n} dx = \int \frac{\sin^2 x}{(a + b \cos x)^n} dx +$

$$+ \int \frac{\cos^2 x}{(a + b \cos x)^n} dx.$$

Se integrează prin părți prima integrală $u = \sin x$, $dv = \frac{\sin x \, dx}{(a + b \cos x)^n}$ deci

$$\int \frac{\sin^2 x}{(a + b \cos x)^n} dx = \frac{1}{(n-1)b} \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b} \int \frac{\cos x \, dx}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră apoi

$$\int \frac{\cos^2 x}{(a+b\cos x)^n}\,dx = -\frac{1}{b^2}\int \frac{(a^2-a^2-b^2\cos^2 x)\,dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} -$$

$$-\frac{1}{b^2}\int \frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,dx, \text{ deci } \int \frac{\cos^2 x}{(a+b\cos x)^n}\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} -$$

$$-\frac{a}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{b}\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}, \text{ rezultă :}$$

$$I_n = \frac{-b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-2}$$

214. Se procedează ca la **213**

$$I_n = \frac{b\cos x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\sin x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-2}.$$

215. $u = x^{n-1}$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ şi se integrează prin părţi.

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

sau $$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

de unde rezultă

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}a^2\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

216. Schimbarea de variabilă $x = 2az^2$ reduce integrala la $2(2a)^n \int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^2}}$ adică la exerciţiul precedent pentru $a = 1$ şi exponent $2n$, deci

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{2n-1}{n}a\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

217. $u = x^n$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$; $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,dx =$

$$= \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}\frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}\,dx,$$

deci

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^n\sqrt{a+bx}}{(2n+1)b} - \frac{2x}{2n+1}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx}}.$$

218. $u = (\arcsin x)^n$ $dv = dx$ se obţine integrînd prin părţi :
$I_n = \int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^{n-1} - n\int (\arcsin x)^{n-1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru ultima integrală se pune $u = (\arcsin x)^{n-1}$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ şi se integrează prin părţi.

$$I_n = x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

219—220. Se notează $J_n = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $I_n = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. Se consideră $I_{n-1} = \int \frac{x^{n-1} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$ care se integrează prin părţi punînd, $u = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}$, $dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$, $du = \frac{(n-1)x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \frac{x^n}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $v = e^{\operatorname{arctg} x}$ deci

$$I_{n-1} = \frac{x^{n-1} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - (n-1)\int \frac{x^{n-2} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

sau $I_{n-1} = \frac{x^{n-1} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(1+x^2) e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx + \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$

de unde $$I_{n-1} = \frac{x^{n-1} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - (n-1)I_{n-2} - (n-2)I_n$$

aşadar $$(n-2)I_n = \frac{x^{n-1} e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I_{n-1} - (n-1)I_{n-2}.$$

Pentru calculul lui J_n avem

$$J_n = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^n(1+x^2) e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}\,dx$$

deci $$J_n = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^{n+2} e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

aşadar $$J_n = I_n + I_{n+2}.$$

INTEGRAREA FRACŢIILOR RAŢIONALE

221. $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ de unde

$$A = \left.\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right|_{x=0} = -\frac{3}{2}; \quad B = \left.\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right|_{x=1} = \frac{5}{3};$$

$C = \left.\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right|_{x=-2} = -\frac{1}{6}$ ($3x^2+2x-2$ este derivata numitorului fracţiei)

deci

$$\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| =$$

$$= \ln\left|\frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}\right|.$$

222. Fracţia este neregulată (are gradul numărătorului mai mare decît al numitorului). Se scoate partea întreagă şi apoi se descompune fracţia regulată în fracţii simple.

$$\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} = x - 2 + \frac{5x^2-4}{(x^2-1)(x+2)};$$

$$\frac{5x^2-4}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}; \quad A = \frac{1}{6}; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad C = \frac{16}{3} \text{ etc.}$$

223. $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$; $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \text{ de unde}$$

$$A = \left.\frac{4x^2+16x-8}{3x^2-4}\right|_{x=0} = 2;\ B = \left.\frac{4x^2+16x-8}{3x^2-4}\right|_{x=2} = 5;$$

$$C = \left.\frac{4x^2+16x-8}{3x^2-4}\right|_{x=-2} = -5$$

deci

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

224. $x - \frac{2}{x} + \ln\frac{x^2}{|x-1|}$; $\frac{x^3-2}{x^3-x^2} = \frac{x^3-x^2+x^2-2}{x^3-x^2} = 1 + \frac{x^2-2}{x^3-x^2}$

$$\frac{x^2-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \text{ etc.}$$

225. $\ln\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x-3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{13}{x-3}$. **226.** $\frac{x^5+2}{x^5-x} = \frac{x^5-x+x+2}{x^5-x} = 1 + \frac{x+2}{x^5-x}$;

$x - 2\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

227. $-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + 6\ln|x-1| + 3x + \frac{x^2}{2}$.

228. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

229. $\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x+a|} - \frac{a}{x+a}\right]$; **230.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

231. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right|$; **232.** $\frac{x^3}{x^4+3x^2+2} = \frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$

rezultă $\ln\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

233. Funcția este impară, se face schimbarea $x^2 = t$ și se obține

$$-\frac{1}{4}\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

234. Funcția este pară și pentru descompunerea în fracții simple se face $x^2 = t$ și avem de descompus fracția $\frac{t}{(t+a^2)(t+b^2)}$; rezultă $\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - b\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right]$.

235. Se descompune fracția $\frac{x^2}{x^4-1}$ făcînd $x^2 = t$ funcția fiind pară, adică $\frac{t}{t^2-1}$ și se obține $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

Scanned with OKEN Scanner

236. Se descompune, funcția fiind pară, $\frac{1}{t(t-1)^2}$ în fracții simple și se obține $-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1}$.

237. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = x^3 + x^2 + 4(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(x+2)^2$

$$I = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2}.$$

238. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x-1)^2(x+1)^3$.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}. \qquad (1)$$

Pentru determinarea coeficienților se amplifică (1) cu $(x-1)^2$ și se obține

$$\frac{1}{(x+1)^3} = A_1(x-1) + A_2 + (x-1)^2\left(\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}\right). \qquad (2)$$

Se face $x = 1$ și rezultă $A_2 = \frac{1}{8}$. Apoi se derivează egalitatea (2) și se obține:

$$-\frac{3}{(x+1)^4} = A_1 + \left[(x-1)^2\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}\right]'$$

care pentru $x = 1$ dă $A_1 = -\frac{3}{16}$.

Pentru determinarea coeficienților B_1, B_2, B_3, se amplifică (1) cu $(x+1)^3$ și se procedează ca mai sus. Se obțin $B_3 = \frac{1}{4}$; $B_2 = \frac{1}{4}$; $B_1 = \frac{3}{16}$.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

239. $27\,\frac{x^2+px+q}{(x-1)^3(x+2)^2} = 3\,\frac{1+p+q}{(x-1)^3} + \frac{4+p-2q}{(x-1)^2} + \frac{q-p}{x-1} + \frac{2q-p-4}{(x+2)^2} + \frac{p-q}{x+2}$. Integrala va fi algebrică dacă termenii care prin integrare ar da logaritmi dispar, adică dacă $p = q$. Se obține:

$$\frac{1}{27}\left(-3\,\frac{1+2p}{2(x-1)^2} - \frac{4-p}{x-1} - \frac{p-4}{x+2}\right) = \frac{2-2p-3x}{6(x-1)^2(x+2)}.$$

240. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

241. $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

242. $\frac{1}{12}\ln\frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Transformînd suma de arctg.

$$\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

243. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

$$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

244. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx + \int \frac{x^2dx}{x^6+1} = \operatorname{arctg} x + \int \frac{x^2dx}{x^6+1}$;

se face $x^3 = t$ **deci** $I = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$.

245. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2} + \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

246. $\frac{1}{x-1} + \ln\frac{(x-1)^2}{|1+x^3|} + \operatorname{arctg}\ x + \frac{2x+1}{1+x^2}$.

247. $(x^2+2x+5)^2 = [(x+1)^2+4]^2$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2} \text{ se face } x+1 = 2t \quad dx = 2dt;$$

$$\int \frac{2dt}{(4t^2+4)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Se foloseşte apoi formula de la ex. 198.

248. $\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2 = \left(1-\frac{2a^2}{x^2+a^2}\right)^2 = 1 - \frac{4a^2}{x^2+a^2} + \frac{4a^4}{(x^2+a^2)^2}$

$$\int\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2 dx = x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + 4a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

pentru ultima integrală se foloseşte ex. 198.

249. $f(x) = (x^3+1)^2$; $f'(x) = 6x^2(x^3+1)$; $D(x) = x^3+1$;

$$D_1(x) = \frac{f(x)}{D(x)} = x^3+1. \text{ Avem egalitatea}$$

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+1} + \int\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1}dx$$

care derivată dă

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2ax+b)(x^3+1) - 3x^2(ax^2+bx+c)}{(x^3+1)^2} + \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1}.$$

Se elimină numitori şi din identificarea polinoamelor se obţin:

$$\alpha = 0;\ \beta = 0;\ \gamma = \frac{2}{3};\ a = 0;\ b = \frac{1}{3};\ c = 0;$$

deci

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3+1} =$$

$$\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\ln\sqrt{\frac{(x+1)^3}{x^3-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right). \text{ (vezi 228).}$$

250. $D(x) = (x-1)(x+1)^2$ şi $D_1(x) = (x-1)(x+1)$; Avem

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2} + \int\frac{\alpha x+\beta}{(x-1)(x+1)}dx. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd această egalitate (1) și identificînd polinoamele rezultă:

$$\alpha = 0\,;\ \beta = \frac{1}{8}\,;\ a = b = c = \frac{1}{8},$$

deci

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

251. Se procedează ca mai sus

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x^3-6x^2+7x-4}{8(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} + \frac{5}{8}\operatorname{arctg} x.$$

252. Se procedează ca la ex. 249.

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

253. Funcția de integrat este impară se face deci $x^2 = t$ și se obține:

$$\frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} \text{ (vezi ex. 133).}$$

254. Se face substituția omografică $t = \dfrac{x+1}{x-2}$ și integrala devine,

$$-\frac{1}{81}\int \frac{(t-1)^3}{t^2}\,dt = -\frac{1}{81}\left(\frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t|\right),$$

unde se înlocuiește t cu $\dfrac{x+1}{x-2}$.

255. Se face substituția omografică $t = \dfrac{x-1}{x+1}$ și se obține:

$$\frac{1}{2^7}\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t^2} - \frac{15}{t} - 20\ln|t| + 15t - 3t^2 + \frac{t^3}{3}\right).$$

256. Integrala conține polinoame reciproce; se împarte numărătorul și numitorul cu x^2 și se obține

$$\int \frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5}$$

în care se face $x + \dfrac{1}{x} = t$ care reduce integrala la

$$\int \frac{dt}{t^2+3t+3} = \int \frac{dt}{\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+3}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+3x+2}{x\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

257. Aceeaşi metodă ca la exerciţiul precedent :

$$\ln \frac{x^3+1}{x^3+x+1}.$$

258. Procedînd ca mai sus se obţine

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^3-1}{x\sqrt{3}}.$$

259. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+6x^3+1}\,dx = \int \frac{x^3+1}{x^4+6x^3+1}\,dx - \int \frac{x\,dx}{x^4+6x^3+1}.$

Prima integrală se calculează împărţind numărătorul şi numitorul cu x^2 şi apoi se face $x - \frac{1}{x} = t$; a doua este impară deci se face $x^2 = t$ etc.

260. Funcţia de integrat este impară, se face $x^2 = t$ şi se obţine

$$\frac{1}{4}\int \frac{t-3}{t(t^2+3t+2)}\,dt \text{ etc.}$$

261. Funcţia $\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} = \frac{x^8 \cdot x^3}{x^8+3x^4+2}$ este impară, se face $x^4 = t$ şi se obţine $\frac{1}{4}\int \frac{t^2 dt}{t^2+3t+2}$ etc.

262. $\int \frac{dx}{x(x^8+1)} = \int \frac{x^3 dx}{x^4(x^8+1)}$ care cu $x^4 = t$ devine $\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t(t^2+1)}$ etc.

INTEGRAREA FUNCŢIILOR IRAŢIONALE

263. $1 + x = t^2$ rezultă $2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x}.$

264. $\sqrt[6]{x} = t$ şi se obţine $2t^4 - \frac{4}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{2}\ln|2t+1|$.

265. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x}.$ **266.** $\sqrt[3]{1+x} = t$; $dx = 3t^2 dt$,

$$\int \frac{3t^3 dt}{1+t} = 3\left(\frac{t^3}{2} - t + \ln|t+1|\right).$$

267. $1 + x = t^6$; rezultă $6\int \frac{t^8 - t^5}{t^3+1}\,dt$; împărţind şi integrînd se obţine

$$\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln|1+t| \text{ unde } t = \sqrt[6]{1+x}.$$

268. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$ rezultă $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

269. $\sqrt{x} = t$ şi apoi $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \mu$ şi se obţine $\sqrt{1-x}(\sqrt{x}-2) -$

$$- \arcsin \sqrt{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

270. $\sqrt[4]{x} = t$ și apoi $\sqrt[3]{1+t} = u$, și rezultă $12\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^4}{4}\right)$ unde

$$u = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

271. $\sqrt[6]{1+x} = t$ se obține $2\sqrt{1+x} - 2\operatorname{arctg} x\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} +$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{1+x}+1)^2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{1+x}+1} + 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{3}}.$$

272. $\ln\frac{|t^2-1|}{t^4+t^2+1} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}$ unde $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

273. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}}}$, se face $\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}} = t'$ de unde $x = \frac{4t^4-1}{t^4-1}$,

$dx = -\frac{12t^3}{(t^4-1)^2}dt$; se obține $\int\frac{dt}{t^2(t^4-1)} = -\int\frac{dt}{t^2} + \int\frac{t^2}{t^4-1}dt$ etc.

274. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-6)}} = \int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{x-6}{x}}}$. Se face $\sqrt[3]{\frac{x-6}{x}} = t$ și se obține

$$\int\frac{3tdt}{1-t^3} \text{ etc.}$$

275. Se face $x = \frac{1}{t}$ și integrala se reduce la $-\int\frac{dx}{\sqrt{ct^2+bt+a}}$.

Însă $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ este pentru $a<0$; $\frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ iar pentru $a>0$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}).$$

276. $\sqrt{1+x^2} = t - x$ și se obține $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \operatorname{argsh} x$.

277. $\sqrt{1-x^2} = t(1-x)$ și se obține $\int\frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ cu

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

278. Se face $\sqrt{-x^2+5x-6} = t(x-2)$ și se obține

$$\int\frac{2dt}{2t^2+3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}}.$$

279. Se face a doua substituție a lui Euler $\sqrt{1+x-x^2} = tx+1$ de unde $x = \frac{1-2t}{1+t^2}$; $dx = 2\frac{t^2-t-1}{(1+t^2)^2}dt$ și integrala devine

$$\int\frac{2-4t}{t(t+2)(t^2+1)}dt = \ln\left|\frac{t}{t+2}\right| - 2\operatorname{arctg} t \text{ unde } t = \frac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

280. $x^2=t$, $\rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{(t-1)(4-t)}}$ se face $\sqrt{(t-1)(4-t)} = u(t-1)$ sau $4-t = u^2(t-1)$; $t = \frac{4+u^2}{1+u^2}$ şi se obţine $-\int \frac{du}{4+u^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} =$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2-1}}.$$

281. Se procedează ca la 279 şi se obţine

$$\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

282. $x = \frac{1}{t}$ şi se obţine $-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$.

283. $\sqrt{3-x} = t$; $3-x = t^2$ iar $1-x = t^2-2$, $dx = -2tdt$ se obţine $\int \frac{-2tdt}{t-2+\sqrt{t^2-2}}$ care se rezolvă cu substituţia lui Euler $\sqrt{t^2-2} = u-t$ etc.

284. $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$ şi rezultă $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2+\sqrt{x^2+x+1}}\right|$.

285. Se pune $\sqrt{1+x^2} = t+x$, $x = \frac{1-t^2}{2t}$ şi $\sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}$ de unde

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -4\int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

286. $-2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2}$.

287. $\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\operatorname{argch}\frac{x}{a}$.

288. $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argch} x$.

289. Integrala este binomă $\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; $m=3$, $n=2$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$ se face $\sqrt{1+x^2} = t$ şi se obţine $\sqrt{1+x^2}\,\frac{x^2-2}{3}$.

290. $x = t^6$ şi se obţine $6\int \frac{(t^4+1)^2}{t^4}dt = 6 - \left(\frac{1}{3\sqrt{x}} + 2\sqrt[6]{x} + \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}\right)$.

291. $\int x^5(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; $m=5$; $n=2$; $p = -\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n} = 3$ se face $a^2-x^2 = t^2$ şi se obţine $\sqrt{a^2-x^2}\left[-a^4 + \frac{2}{3}a^2(a^2-x^2) - \frac{1}{5}(a^2-x^2)^2\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

292. $\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$, $\frac{m+1}{n}+p=-3$ deci cazul III se face $\frac{1+x^2}{x^2}=t^2$ sau $x^{-2}+1=t^2$, $-x^{-3}dx=tdt$ sau $dx=-x^3t\,dt$.

Înlocuind, rezultă $\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t$ unde $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

293. Aceiaşi substituţie ca în cazul precedent. $-\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

294. $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}dx$, $\frac{m+1}{n}+p=1$ se face deci $\frac{1+x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}=t^4$ sau

$$x^{-\frac{4}{3}}+1=t^4,\ -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}dx=4t^3dt\ dx=-3x^{\frac{7}{3}}t^3dt;$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}dx=-3\int x^{-\frac{2}{3}}(t^4x^{4/3})^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{7}{3}}t^3dt=-3\int x^{\frac{8}{3}}t^6dt,\quad\text{dar}$$

$$x^{\frac{8}{3}}=\frac{1}{(t^4-1)^2}\ \text{se obţine deci}$$

$\int\frac{t^6}{(t^4-1)^2}dt$. Pentru descompunere în fracţii simple se face $t^2=u$ şi se descompune $\frac{u^3}{(u^2-1)^2}$ în fracţii simple etc.

295. a. $\int\sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}\,dx=\int x^{\frac{1}{4}}(1+x^5)^{-\frac{1}{4}}dx$, $\frac{m+1}{n}+p=0$. Se face deci $\frac{1+x^5}{x^5}=t^4$ sau $x^{-5}+1=t^4$ şi sub această formă se derivează, $dx=-\frac{4}{5}x^6t^3dt$; $-\frac{4}{5}\int x^{\frac{1}{4}}(t^4x^5)^{-\frac{1}{4}}\cdot x^6t^3dt=-\frac{4}{5}\int t^4x^5dt=-\frac{4}{5}\int\frac{t^3}{t^4-1}dt$ etc.

295 b. Acelaşi procedeu ca la 295 a.

296. $\int x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}dx$, $\frac{m+1}{n}+p=0$. Se face deci $\frac{1+x^{4/3}}{x^{4/3}}=t^4$ sau $x^{-\frac{4}{3}}+1=t^4$ şi se procedează ca mai sus, obţinîndu-se $-3\int\frac{t^3}{t^4-1}dt$ etc.

297. $\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$; $\frac{m+1}{n}+p=0$ deci se face $\frac{1+x^4}{x^4}=t^4$ sau

$x^{-4}+1=t^4$; $-x^{-5}dx=t^3dt$ $dx=-x^5t^3dt$; $\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=-$

$$-\int x^{-1}t^{-1}x^5t^3dt=-\int x^4t^2dt=-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

298. $\int x^{\frac{n}{2}}(a+x^{n+2})^{-\frac{1}{2}}\,dx$; $\frac{m+1}{n}+p=0$ deci cazul III. Se face

$\frac{a+x^{n+2}}{x^{n+2}}=t^2$ sau $ax^{-(n+2)}+1=t^2$ şi se obţine

$$\frac{2}{n+2}\ln(\sqrt{a+x^{n+2}}+\sqrt{x^{n+2}}).$$

299. Se ataşează integralei curba $\sqrt[3]{x^5-x^3}=y$ sau $x^5=x^3+y^3$. Pentru a găsi o reprezentare parametrică se taie curba cu $y=tx$ şi se obţine $x=$

$=\sqrt{1+t^3}$, $y=t\sqrt{1+t^3}$ şi integrala se reduce la $\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{t^3+1}$,

rezultă $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}-\sqrt[3]{x^2-1}+1}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2-1}-1}{\sqrt{3}}$.

300. Integrala este ataşată hiperbolei echilatere $x^2-y^2-x=0$. Se taie cu $y=tx$ şi se obţine reprezentarea parametrică raţională (curba este unicursală): $x=\frac{1}{1-t^2}$, $y=\frac{t}{1-t^2}$. Integrala devine $\frac{1}{4}\int\frac{2t^2-2}{\left(t^2-\frac{3}{2}\right)\left(t^2-\frac{1}{2}\right)}dt=\frac{1}{4}$

$$\int\frac{\left(t^2-\frac{3}{2}\right)+\left(t^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(t^2-\frac{3}{2}\right)\left(t^2-\frac{1}{2}\right)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-\sqrt{3}}{t\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{x}}{\sqrt{2(x-1)}+\sqrt{x}}\right|+\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2(x-1)}+\sqrt{3x}}\right|.$$

301. Se ataşează curba $\sqrt[4]{x^3(1-x)}=y$ sau $x^4+y^4-x^3=0$ care este o curbă unicursală. Reprezentarea parametrică se obţine tăind cuadrica cu dreapta $y=tx$ şi rezultă $x=\frac{1}{1+t^4}$, $y=\frac{t}{1+t^4}$. Se obţine $-4\int\frac{t^2dt}{t^4+1}$ care este calculată la 135. Deci: $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}$

unde $t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

Scanned with OKEN Scanner

302. Se atașează curba $\sqrt[3]{2x^2-x^3}=y$ sau $x^3+y^3-2x^2=0$ care este o cubică cu punct dublu în origine deci o curbă unicursală.

Se taie cu dreapta $y=tx$ și se obține reprezentarea parametrică $x=\frac{2}{1+t^3}$;

$y=\frac{2t}{1+t^3}$ și rezultă $-3\int\frac{t\,dt}{t^3-1}=-\frac{1}{2}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ unde

$$t=\frac{\sqrt[3]{2x^3-x^3}}{x}.$$

303. Funcția este impară și notăm $x^2=t$ și apoi $\sqrt{1+t+t^2}=u-t$ și se obține $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{u+2}\right)$ unde $u=\sqrt{1+x^2+x^4}+x^2$.

304. Funcția este impară se face deci $x^2=t$ obținîndu-se $\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-2}}$ care se calculează cu substituția lui Euler $\sqrt{t^2+t-2}=u(t-1)$ și se obține $-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}$, unde $u=\frac{\sqrt{x^6+x^3-2}}{x^3-1}$.

305. $x^2=t$ și se obține $\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^3}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$; în prima se face

$$t=\frac{1}{u}\text{ etc.}$$

306. Se face $x+\frac{1}{x}=t$ și se obține $-\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$.

307. $\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+3}}dx$, $x+\frac{1}{x}=t$ și rezultă

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\text{ unde }t=\frac{x^2+1}{x}.$$

308. $\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx=\int\frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{(1-x^2)(1+x^2)}dx=-\int\frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx=$

$$=-\int\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

se face $x-\frac{1}{x}=t$ $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$ și se obține $-\int\frac{\sqrt{t^2+2}}{t(t^2+4)}dt$.

Scanned with OKEN Scanner

Schimbarea $t^2 + 2 = u^2$ duce la $-\int \frac{u^2 du}{(u^2-2)(u^2+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{u^2-2+u^2+2}{(u^2-2)(u^2+2)}\,du =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-2}$$

deci $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}}\right)$.

309. $u = (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}$ $du = n(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}-1} x\,dx$
$dv = dx$ $v = x$ etc.

310. $u = \sqrt{2ax-x^2}$ $dv = x^n dx$ etc.

INTEGRAREA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

311. a) $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{\cos a}\int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right)}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{\cos a}\int \frac{\cos\frac{x-a}{2}}{2\sin\frac{x-a}{2}}\,dx + \frac{1}{\cos a}\int \frac{\sin\frac{x+a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}}\,dx = \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$$

Altfel: se face schimbarea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dar se introduce și $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$

b) $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|$; c) $\cos^2 a[\ln\sin(x-a) - x\operatorname{tg} a]$

d) se transformă în produs: $\sin x + \cos x = \sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{4}\cos x =$

$$= \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}}\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \int \frac{\cos\frac{\pi}{4}\,dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$$

e) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x} = \int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4}\sin x} = \sin\frac{3\pi}{4}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}$, așadar

$$\int \frac{dx}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\right|$$

Scanned with OKEN Scanner

f) $\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{2\sqrt{2} \pm \cos x \pm \sin x} = \int \frac{dx}{2+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ se face schimbarea $x-\frac{\pi}{4}=$

$= u$, deci integrala devine $\int \frac{du}{2+\cos u}$; făcînd schimbarea $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=t$ rezultă:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{3}}$$

312. Cele cinci integrale se calculează făcînd schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

a) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$; b) $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$; c) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|$.

e) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \int \frac{3-\sin x-(2-\sin x)}{(2-\sin x)(s-\sin x)}\,dx$

deci

$$\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \int \frac{dx}{2-\sin x} - \int \frac{dx}{3-\sin x} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

313. Fracția de sub semnul integral se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_1\sin x+b_1\cos x \pm c_1}{a\sin x+b\cos x \pm c} = A + B\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x+c} + \frac{C}{a\sin x+b\cos x \pm c}$$

rezultă:

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1 = A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x- \\ -b\sin x)+C, \quad \text{sau}$$

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1 = (Aa-Bb)\sin x+(Ab+Ba)\cos x+ \\ +cA+C$$

de unde: $Aa-Bb=a_1$; $Ab+Ba=b_1$; $cA+C=c_1$, din acest sistem de ecuație se deduc A, B și C. Așadar:

$$\int \frac{a_1\sin x \pm b_1\cos x \pm c_1}{a\sin x+b\cos x \pm c}\,dx = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+ \\ +C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$

Scanned with OKEN Scanner

314. a) Fracția de sub semnul integral poate fi scrisă:

$$\frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} = A + B \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x}$$

sau: $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, deci $a_1 \sin x + b_1 \cos x = (Aa - Bb) \sin x + (Ab + Ba) \cos x$, de unde $Aa - Bb = a_1$; $Ab + Ba = b_1$, de unde rezultă A și B deci

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln | a \sin x + b \cos x |$$

b) aplicînd metoda precedentă se obține:

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln | 3 \sin x + 2 \cos x |$$

c) $-\frac{1}{5} x - \frac{3}{5} \ln | \sin x + 2 \cos x|$

d) vezi problema 313 se obține:

$$\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx = -\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} \ln | \sin x - 2 \cos x + 3 | -$$

$$-\frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3}$$

pentru calculul integralei se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, de unde rezultă:

$$-\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} \ln \left| \sin x - 2 \cos x + 3 \right| - \frac{6}{5} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \diamondsuit 1}{2}$$

e) $\frac{2}{5} x - \frac{1}{5} \ln \left| 3 \sin x + 4 \cos x - 2 \right| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)} \right|$

f) $\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{2} + \sin x + \cos x \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right|$

g) $-x + 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|$

315. Integralele următoare sînt de forma:

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

Funcția de sub semnul integral poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} = A \cos x - B \sin x + \frac{C}{a \sin x \diamondsuit b \cos x}$$

Rezultă :

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x = (A \cos x - B \sin x)(a \sin x + b \cos x) + C$$

de unde

$$(a_1 - c_1)\sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 = -(Ab + Ba)\sin^2 x + (Aa - Bb) \sin x \cos x + Ab + C$$

Aşadar : $Ab + Ba = c_1 - a_1$; $Aa - Bb = 2b_1$, $Ab + C = c_1$ de unde se deduc A, B, C.
Deci :

$$\int \frac{(a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x)dx}{a \sin x + b \cos x} = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

a) folosind metoda de mai sus rezultă :

$$\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx = -\sin x + 3 \cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right|$$

b) $\frac{1}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} - 1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|$

316. a) Elementul diferenţial rămîne neschimbat prin înlocuirea lui x cu $\pi - x$, deci se face schimbarea de variabilă $\sin x = t$.
Rezultă :

$$\int \frac{dx}{\cos x \cos^4 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{(1 - \sin^2 x)(1 - 2 \sin^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)(1 - 2t^2)^2} \text{ etc.}$$

se obţine $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$

b) Elementul diferenţial rămîne neschimbat înlocuind pe x prin $-x$, deci se face schimbarea $\cos x = t$. Rezultă :

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x (2\cos^2 x - 1)} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)(2t^2 - 1)} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)(1 - 2t^2)} \text{ etc.}$$

se obţine $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

c) Se face schimbarea $\sin x = t$ şi rezultă $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right|$.

d) Se face schimbarea $\cos x = t$, rezultă $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x}{\sqrt{3}} \right)$.

e) Se face schimbarea $\cos x = t$ şi rezultă $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sin x (1 + \cos x)}{(1 + 2 \cos x)^2} \right|$.

f) $\cos x = t$ şi rezultă $\ln \left| 2 + \frac{1}{\cos x} \right|$.

Scanned with OKEN Scanner

g) $\sin x = t$ și rezultă $\frac{4}{2+\sin x} + 2\ln|\sin x + 2|$.

h) $\cos x = t$ și rezultă $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x^2)}{(1+\cos x)^3}$.

i) $\int\frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx = 2\int\frac{\sin x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx - \int\frac{\cos x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

prima integrală se calculează făcînd schimbarea $\cos x = t$, a doua făcînd schimbarea $\sin x = t$ și rezultă :

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right|$$

317. a) $A + B = \int\frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$

$$A - B = \int(\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x$$

se obține :

$$A = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$$

$$B = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$$

b) $\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin x + \cos x} = \int\cos x\,dx - \int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x + \cos x}$

conform exercițiului precedent rezultă :

$$\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|.$$

c) Se face $\operatorname{tg} x = t$ și se obține integrala $\int\frac{t^2dt}{(t+1)(t^2+1)^2}$, calculînd rezultă $\frac{1}{8}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2+1} - \frac{t+1}{4(t^2+1)}$, sau revenind la variabila x: $\frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x)$.

318. a) $A + B = x$, $B - A = \ln|\cos x + \sin x|$ de unde

$$B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x| \text{ și } A = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x|$$

se pot calcula separat integralele făcînd schimbarea $\operatorname{tg} x = t$.

b) $A = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$; $B = \frac{1}{2}\left[-x + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

319. a) Se poate lua $\operatorname{tg} x$ ca variabilă, dar este preferabil de a trece în primul rînd la arcul dublu

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int\frac{dx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x},$$

se face schimbarea $\operatorname{tg} 2x = t$ și rezultă $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

b) se face $\operatorname{tg} x = t$ și rezultă $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

c) Integrala se poate scrie $\int \frac{2\cos 2x}{2 - \sin^2 2x}\,dx$, se face schimbarea $\sin 2x = t$ și rezultă $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right|$.

d) $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 2x} = 2\int \frac{2dx}{1 + 3\cos^2 2x}$

se face schimbarea de variabilă $2x = u$ și se obține

$2\int \frac{du}{1 + 3\cos^2 u}$, se face $\operatorname{tg} u = v$ și rezultă $2\int \frac{dv}{v^2 + 4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{2} =$

$= \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} \right)$,

e) se face $\operatorname{tg} x = t$ și rezultă $\frac{1}{6} \ln \frac{1 - \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sin x - \cos x}{\sqrt{3}\cos x}$

f) $\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sin x - \cos x}{\sqrt{3}\cos x}$

320. a) se face $\operatorname{tg} x = t$, rezultă $3(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + \frac{1}{3}(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x)$

b) $-\operatorname{cotg} x + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; c) se face $\sin x = t$ și integrala devine

$\int \frac{t^2 dt}{(1 - t^2)^2}$ etc. se obține $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right|$

d) se face $\cos x = t$ și se obține $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|$

e) $\frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$, f) se face $\operatorname{tg} x = u^2$ și rezultă

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}} = \sqrt{2}\int \frac{du}{1 + u^4}$ dar $\int \frac{du}{u^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2 + u\sqrt{2} + 1}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} +$

$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u^2 - 1}{u\sqrt{2}}$ deci $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{4} \ln \frac{u^2 + u\sqrt{2} + 1}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} +$

$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u^2 - 1}{u\sqrt{2}}$ unde $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$,

g) se face $\cos x = t$ și rezultă $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x})$.

h) Se face schimbarea $\operatorname{tg} x = t^2$, și rezultă:

$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = 2\int \frac{t^2 dt}{1 + t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - t\sqrt{2} + 1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2 - 1}{t\sqrt{2}}$

i) $\frac{1}{4} \ln \frac{(t^2 + 1)^2}{t^4 - t^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t^2 - 1}{\sqrt{3}}$ unde $t = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

Scanned with OKEN Scanner

321. a) Folosind arcul dublu, și făcînd substituția $\operatorname{tg} 2x = t$ se obține:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x \, dx}{\cos^8 x + \sin^8 x} = \int \frac{t^2 dt}{t^4 + 8t^2 + 8}$$

După descompunerea în fracții simple rezultă:

$$\int \frac{t^2 dt}{t^4 + 8t^2 + 8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 4 + 2\sqrt{2}} - \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 4 - 2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \text{ unde } t = \operatorname{tg} 2x,$$

b) se face $\operatorname{tg} x = t$ și rezultă $x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}}$

c) Se face $\operatorname{tg} x = t$, deci $\int \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int \frac{\sqrt{2 + t^2}}{1 + t^2} dt$

în ultima integrală se face schimbarea $t = \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$ se obține

$$\int \frac{\sqrt{2 + t^2}}{1 + t^2} dt = 2 \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi} = 2 \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}$$

prin schimbarea $\sin \varphi = u$ integrala devine $2 \int \frac{du}{1 - u^4}$.

Dar $2 \int \frac{du}{1 - u^4} = \operatorname{arctg} u + - \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right|$, revenind la variabila inițială se obține $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}} + \ln (\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x)$.

322. Pentru integralele următoare se folosesc formulele

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

a) $-\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x$; b) $\frac{1}{4} x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 2x$

c) $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{12} \cos \frac{11x}{6}$

d) $-\frac{1}{2} \cos a \cos(x + b) - \frac{1}{4} \cos (x + a - b) + \frac{1}{12} \cos(3x + a + b)$.

e) $\frac{1}{4} x + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a - b)x}{16(a - b)} + \frac{\sin 2(a + b)x}{16(a + b)}$

Scanned with OKEN Scanner

323. Pentru următoarele integrale se folosesc identitățile:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

a) $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx-\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|;\ \sin(a-b)\neq 0.$$

b) $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+a)}dx=$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx+\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|;\ \cos(a-b)\neq 0.$$

c) $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+b)}\right|;\ \sin(a-b)\neq 0.$

d) se folosește identitatea $1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+a)=\frac{\operatorname{tg}(x+a)-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}$ rezultă

$$-x+\operatorname{cotg}a\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|;\ \sin a\neq 0.$$

e) $\int\frac{\cos x}{\cos 3x}dx=\int\frac{dx}{4\cos^2x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^2x-\sin^2\frac{\pi}{3}}=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{3}}\ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}\right|.$$

324. a) $\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}$; b) $x-\operatorname{c\,th}x$; c) $\frac{1}{\operatorname{sh}a}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{x-a}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x+a}{2}}\right|$

d) $\frac{1}{\operatorname{ch}a}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{x-a}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x+a}{2}}\right|$; e) $\operatorname{ch}^2a\ln|\operatorname{th}x-\operatorname{th}a|+\frac{\ln(1-\operatorname{th}x)}{2(\operatorname{th}a-1)}-\frac{\ln(\operatorname{th}x+1)}{2(\operatorname{th}a+1)}$

f) $\ln\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}+\operatorname{arctg}e^x$

Scanned with OKEN Scanner

325. a) $-\frac{1}{2(1+2e^x)}$; b) $\frac{2}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\operatorname{argth}\frac{(a-b)\operatorname{th}\frac{x}{2}-c}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}$

pentru $a^2+c^2>b^2$ și $\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(b-a)\operatorname{th}\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}$ pentru $a^2+c^2<b^2$.

326. Metodele sînt analoage ca și pentru expresiile formate cu $\sin x$ și $\cos x$.

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{8}-\operatorname{sh} 2x+\frac{3}{2}\right)$; b) $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sh} 3x}{3}+3\operatorname{sh} x\right)$.

c) $\frac{\operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x}+\frac{2}{3}\operatorname{th} x$; d) $-\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}+\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$.

INTEGRAREA PRIN DIFERITE METODE

327. Prin aplicarea repetată a integrării prin părți, se obține:

$$\int P(x)e^x dx=[P(x)-P'(x)+P''(x)-\ldots]e^x.$$

328. Integrînd prin părți se obține:

$$A=-\mathrm{P}(x)\cos x+B';\ \left(B'=\int\frac{dP}{dx}\cos x\,dx\right)$$

$$B=\mathrm{P}(x)\sin x-A';\ \left(A'=\int\frac{dP}{dx}\sin x\,dx\right)$$

Aplicînd succesiv aceste formule de recurență, se obține:

$$A=-\cos x[\mathrm{P}(x)-\mathrm{P}''(x)+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}(x)-\ldots]+\sin x[\mathrm{P}'(x)-\mathrm{P}'''(x)+\mathrm{P}^{\mathrm{V}}(x)-]$$

$$B=\sin x[\mathrm{P}(x)-\mathrm{P}''(x)+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}(x)-\ldots]+\cos x[\mathrm{P}'(x)-\mathrm{P}'''(x)-\mathrm{P}^{\mathrm{V}}(x)-]$$

329. Se integrează prin părți și se obține:

$$A=\mathrm{P}(x)e^x\sin x-A'-B \text{ unde } A'=\int\frac{dP}{dx}e^x\sin x\,dx$$

Analog $B=\mathrm{P}(x)e^x\cos x+A-B'$, unde $B'=\int\frac{dP}{dx}e^x\cos x\,dx$

se obțin formulele de recurență:

$$A=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\mathrm{P}(x)e^x+\frac{1}{2}(B'-A')$$

$$B=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\mathrm{P}(x)e^x-\frac{1}{2}(A'+B')$$

330. Se integrează prima prin părți, luînd, $dv = \text{ch}x\,dx$ și $u = \cos x$ se obține $A = \cos x\ \text{sh}\,x + B$, se integrează a doua prin părți, luînd $dv = \text{sh}\,x\,dx$; $u = \sin x$ se obține $B = \sin x\ \text{ch}\,x - A$ se deduce

$$A = \frac{1}{2}(\cos x\ \text{sh}\,x + \sin x\ \text{ch}\,x);\quad B = \frac{1}{2}(\sin x\ \text{ch}\,x - \cos x\ \text{sh}\,x).$$

Procedeu analog pentru integralele C și D, se obține

$$C = \frac{1}{2}(\cos x\ \text{ch}\,x + \sin x\ \text{sh}\,x);\quad D = \frac{1}{2}(\sin x\ \text{sh}\,x - \cos x\ \text{ch}\,x)$$

331. Se notează $\cos x + x\sin x = t$, deci $dt = x\cos x dx$ elementul diferențial se scrie $\frac{x^2dx}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{dt}{t^2}$. Integrala devine $\int\frac{x}{\cos x}\frac{dt}{t^2}$; se integrează prin părți notînd $-\frac{x}{\cos x} = u$; $dv = -\frac{dt}{t^2}$; $v = \frac{1}{\cos x + x\sin x}$; $du = -\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}dx$, așadar $\int\frac{x^2dx}{(\cos x + x\sin x)^2} = -\frac{x}{\cos x(\cos x + x\sin x)} + \int\frac{dx}{\cos^2 x}$

Rezultă: $\int\frac{x^2dx}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

332. Se notează $x\cos x - \sin x = t$; $dt = -x\sin x dx$ așadar:

$\int\frac{x^2dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = -\frac{x\,dt}{t^2\sin x}$, se integrează prin părți notînd: $dv = -\frac{dt}{t^2}$; $u = \frac{x}{\sin x}$ deci $v = \frac{1}{t}$; $du = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}dx$, rezultă:

$$\int\frac{x^2dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x}{\sin x(x\cos x - \sin x)} + \int\frac{dx}{\sin^2 x}$$

așadar: $\int\frac{x^2dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$ sau

$$\int\frac{x^2dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \text{tg}\left(x + \text{arctg}\frac{1}{x}\right)$$

333. Se face schimbarea de variabilă $e^{\frac{x}{2}} = t$ și rezultă:

$$\int\frac{\text{arc tg}\,e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx = 2\int\frac{\text{arc tg}\,t}{t^2(1+t^2)}dt$$

dar $\frac{1}{t^2(1+t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}$, de unde

$$2\int\frac{\text{arc tg}\,t}{t^2(1+t^2)}dt = 2\int\frac{\text{arc tg}\,t}{t^2}dt - 2\int\frac{\text{arc tg}\,t}{1+t^2}dt$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$2\int \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2(1+t^2)}\,dt = 2\int \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2}\,dt - (\operatorname{arctg} t)^2$$

Integrînd prin părți se obține:

$$2\int \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2(1+t^2)}\,dt = -\frac{2\operatorname{arc\,tg} t}{t} + \ln\frac{t^2}{1+t^2} - (\operatorname{arctg} t)^2$$

Deci: $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e)^x}\,dx = x - \ln|1+x| - 2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

334. Se obține $A + B = 2\operatorname{ch} x$ și $A - B = 2\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}\,dx$ de unde

$A - B = 2\operatorname{sh} x - 4\operatorname{arctg} e^x$, rezultă:

$A = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x - 2\operatorname{arctg} e^x$ și $B = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + 2\operatorname{arctg} e^x$.

335. Procedeu analog, se obține:

$$A = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|;\quad B = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|.$$

336. Se face schimbarea de variabilă $\operatorname{th} x = t$ și integrala devine:

$$I = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}\,dt.$$

Pentru integrare se face schimbarea $t = \operatorname{tg} u$, deci $I = \int \frac{du}{\cos u \cos 2u} =$

$= \int \frac{\cos u\,du}{(1-\sin^2 u)(1-2\sin^2 u)}$ se notează $\sin u = v$ și deci $I = \int \frac{dv}{(1-v^2)(1-2v^2)}$;

$I = -\ln(\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} + \operatorname{th} x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$

337. Prin schimbarea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, se obține $\sqrt{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$, schimbarea $t =$

$= \sin u$ conduce la $\sqrt{2}\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|$ deci $\sqrt{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} =$

$= \sqrt{2}\ln\left|\frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}\right|$, revenind la vechea variabilă se obține —

$-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} - 1}\right|$.

338. Integrala se poate scrie $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{3+\cos^2 x}}$, se face schimbarea $\sin x = t$

și se obține $\int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{4-t^2}}$. Prin schimbarea $t = 2\sin u$ integrala prece-

dentă devine $\int \frac{du}{1-4\sin^2 u}$, aceasta se transformă în $\int \frac{dv}{1-3v^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+v\sqrt{3}}{1-v\sqrt{3}} \right|$ prin schimbarea $\operatorname{tg} u = v$. Revenind la variabila inițială se obține

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3+\cos^2 x} + \sqrt{3}\sin x}{\sqrt{3+\cos^2 x} - \sqrt{3}\sin x} \right|$$

339. Prin schimbarea $\sqrt{\sin x} = t$ se obține:

$$\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx = \int \frac{2t^2 dt}{1-t^4} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - \operatorname{arctg} t$$

Așadar $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$

340. Schimbarea $x = \cos t$, conduce la $= \int \frac{dt}{2+\sin t}$; prin schimbarea $\operatorname{cotg}\frac{t}{2} = u$ se obține:

$$\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}},$$ revenind la x rezultă

$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}{\sqrt{3}}$. Se obține același rezultat făcînd schimbarea $\sqrt{1-x^2} = t(1-x)$.

341. Se aplică formula

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pentru calculul coeficienților a, b, c, d și λ se derivează egalitatea de mai sus și se obține:

$$\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = (3ax^2+2ax+c)\sqrt{1-x^2} - \frac{x(ax^3+bx^2+cx+d)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

Așadar

$$\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(3ax^2+2bx+c)(1-x^2) - x(ax^3+bx^2+cx+d)+\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

de unde

$$x^4 = (3ax^2+abx+c)(1-x^2) - x(ax^3+bx^2+cx+d)+\lambda$$

rezultă $a = -\frac{1}{4}$; $b = 0'$, $c = -\frac{3}{8}$; $d = 0'$; $\lambda = \frac{3}{8}$.

Deci

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{8}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\arcsin x$$

Scanned with OKEN Scanner

342. $\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

Derivînd și identificînd se obține:

$$a = \frac{1}{3};\ b = -\frac{5}{6};\ c = \frac{1}{6};\ \lambda = \frac{5}{2}$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$$

343. Procedeu analog ca în exercițiile precedente, se obține

$$\frac{1}{6}(2x^2 + x + 7)\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 1})$$

344. Se face schimbarea $x = \frac{1}{t}$ care transformă integrala în $-\int \frac{(3t + 2)dt}{(3t^2 + 2t + 1)\sqrt{4t^2 + 2t + 1}}$; se aplică acestei integrale schimbarea de variabilă definită de funcția omografică $t = \frac{\alpha u + \beta}{u + 1}$, care face să se anuleze termenii de gradul întîi din trinoamele de sub semnul integral. Se obține

$$3t^2 + 2t + 1 = \frac{u^2(3\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2u[3\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1] + 3\beta^2 + 3\beta + 1}{(u + 1)^2}$$

$$4t^2 + 2t + 1 = \frac{u^2(4\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2u[4\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1] + 4\beta^2 + 2\beta + 1}{(u + 1)^2}$$

va trebui așadar să avem simultan:

$$3\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 0$$
$$4\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 0$$

Scăzînd ecuațiile avem $\alpha\beta = 0$; dacă $\beta = 0$ atunci $\alpha + 1 = 0$ și $\alpha = -1$ deci $t = \frac{-u}{u + 1}$.

Prin această schimbare integrală devine

$$\int \frac{(2 - u)du}{(2u^2 + 1)\sqrt{3u^2 + 1}} = 2\int \frac{du}{(2u^2 + 1)\sqrt{3u^2 + 1}} - \int \frac{udu}{(2u^2 + 1)\sqrt{3u^2 + 1}}$$

Se notează $I_1 = \int \frac{du}{(2u^2 + 1)\sqrt{3u^2 + 1}}$; $I_2 = \int \frac{udu}{(2u^2 + 1)\sqrt{3u^2 + 1}}$

Pentru calculul lui I_1 se face substituția lui Abel

$$\frac{3u}{\sqrt{3u^2 + 1}} = w \text{ de unde } u = \frac{w}{\sqrt{9 - 3w^2}}$$

$$du = \frac{3dw}{(3 - w)\sqrt{9 - 3w^2}};\ I_1 = \int \frac{3dw}{9 - w^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3 + w}{3 - w}\right|$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $I_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3u^2+1}+u}{\sqrt{3u^2+1}-u}\right|$. Pentru calculul lui I_2 se face schimbarea $\sqrt{3u^2+1} = y$; $dy = \frac{3u\,du}{\sqrt{3u^2+1}}$ deci $I_2 = \int \frac{dy}{2y^2+1}$; $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(y\sqrt{2}) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\sqrt{3u^2+1}$.

Aşadar $\int \frac{(2-u)du}{(2u^2+1)\sqrt{3u^2+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{3u^2+1}+u}{\sqrt{3u^2+1}-u}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\sqrt{3u^2+1}$

Revenind la variabila x, se obţine

$$\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+6)}}{x+1}$$

345. Se face schimbarea $x = \sin^2 t$; $dx = 2\sin t\cos t\,dt$

$$I = \int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2dt}{1+\sin t} = 2\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= 2\operatorname{tg} t - \frac{2}{\cos t} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}}$$

346. Se face schimbarea $x^2 = t$; $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ şi integrala devine $\frac{1}{2}\int -\frac{\sqrt{t}\,dt}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}}$, în care se face schimbarea $t = \operatorname{tg} u$, deci $\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t}\,dt}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\sin 2u}\,du}{\cos 2u}$ în această ultimă integrală se face schimbarea $\sqrt{\sin 2u} = v$

deci $du = \frac{\sqrt{\sin 2u}}{\cos 2u}dv$, de unde:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\sin 2u}du}{\cos 2u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\sin 2u}\sqrt{\sin 2u}}{\cos 2u\ \cos 2u}du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sin 2u}{\cos^2 2u}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sin 2u}{1-\sin^2 2u}du$$

Aşadar $\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\sin 2u}}{\cos^2 u}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{v^2 dv}{1-v^4}$

Rezultă: $I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$

347. Schimbarea $x^2 = t$ conduce la integrala $\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{(1-t^2)\sqrt{t}}dt$; se face schimbarea $t = \operatorname{tg} u$ şi se obţine $\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\cos 2u\sqrt{\sin 2u}}$ prin schimbarea $\sqrt{\sin 2u} = v$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $\frac{du}{\sqrt{\sin 2u}} = \frac{dv}{\cos 2u}$ deci $\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\cos 2u\sqrt{\sin 2u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{\cos^2 2u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{1-\sin^2 2u} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{1-v^4}$. Aşadar se obţine :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

sau amplificînd cu conjugata numitorului sub semnul ln se obţine :

$$I = \frac{}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} \right|$$

Integrala aceasta ca şi precedenta se poate calcula şi prin schimbarea de variabilă $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2$

348. Elementul diferenţial se poate scrie

$$\frac{\frac{dx}{x}}{(1+x^4)\left[\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

pentru obţinerea unei expresii raţionale se face schimbarea de variabilă

$$\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = z^2$$

Se deduce :

$$\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}$$

249. a. Folosind exerciţiile 346 şi 347 se obţine :

$$I = \frac{a+b}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} \right| - \frac{a-b}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}}$$

349. b. Se poate transforma integrala care conţine un radical de ordinul IV într-o integrală care să conţină un radical de ordinul II. Se face schimbarea $2x^2 - 1 = t^4$ şi se obţine

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{2x^2-1}} = 2\sqrt{2}\int \frac{t^2 dt}{(1-t^4)\sqrt{1+t^4}}$$

(v. exerciţiul 346. Metoda II). Se face schimbarea

$\frac{x^2}{\sqrt{2x^2-1}} = (u\sqrt{2})^2$ se obţine $u = \frac{x}{\sqrt[4]{2x^2-1}}$

$dx = \frac{x^2 du}{u^2\sqrt{u^4-1}}$ se deduce $I = \frac{1}{4}\ln \left| \frac{\sqrt[4]{2x^2-1}+x}{\sqrt[4]{2x^2-1}-x} \right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{2x^2-1}}{x}$

Scanned with OKEN Scanner

349. c. Analogia cu precedenta ne conduce la schimbarea de variabilă $\frac{2x^m}{\sqrt{2x^m-1}} = 2u^m$, de unde rezultă $I = \int \frac{du}{1-u^{2m}}$. Se observă că elementul diferențial de sub semnul integral se scrie

$$\frac{\frac{dx}{x}}{(1-x^m)\left(\frac{2x^m-1}{2x^m}\right)^{\frac{1}{2m}}}$$

Această formă ne conduce la schimbarea de variabilă $2x^m - 1 = x^{2m}y^{2m}$, care nu diferă în fond de precedenta.

CAPITOLUL III

INTEGRALA DEFINITĂ

350. Expresia se scrie

$$\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{n}{n}}$$

Se consideră intervalul [0, 1] împărțit în n părți egale și funcția $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Expresia este o sumă Riemann, deci limita ei este $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. (Expresia este valoarea medie a funcției $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pe intervalul [0, 1]).

351. Expresia se scrie

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

care este valoarea medie a funcției $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pe intervalul [0, 1] deci limita este

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

352. Expresia se scrie

$$\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{2n+2n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{2n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{2n-1}{2n}}\right]$$

a cărei limită este ln2.

353. Expresia se scrie $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right]$ care este valoarea medie a funcţiei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ în intervalul $[0,\ 1]$ şi a cărei limită este $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2$;

354. Expresia se scrie

$\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$ care este valoarea medie a funcţiei $f(x)=\sqrt{x}$ pe $[0,\ 1]$ şi a cărei limită este

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}.$$

355. Expresia se scrie

$$2\,\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

care este dublul valorii medii a funcţiei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ pe intervalul $[0,\ 1]$ deci limita este $2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{3}$.

356. Expresia se scrie

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right]$$

care este valoarea medie a funcţiei x^α pe intervalul $[0,\ 1]$ deci limita este

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}\quad(\alpha\neq -1).$$

357. Expresia se poate scrie

$$\omega=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)},$$

luînd logaritmii în bază e, se obţine

$$\ln\omega=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

care este valoarea medie a funcţiei $f(x)=\ln(1+x)$ pe intervalul $[0,\ 1]$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\omega=\int_0^1 \ln(1+x)dx=2\ln 2-1$

de unde $\lim\omega=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

358. Fie $P_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Se iau logaritmii:

$$\ln P_n = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n - n \ln n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \ln\frac{3}{n} + \ldots + \ln\frac{n}{n}\right)$$

$\ln P_n$ tinde către $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$ şi P_n tinde către $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

359. Expresia se scrie $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sqrt{\frac{p}{n}\left(1-\frac{p}{n}\right)}$ care este valoarea medie a funcţiei $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ pe intervalul [0, 1], limita este deci $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \frac{\pi}{8}$. (Pentru calculul integralei se face $x = \sin^2 t$.)

360. Expresia se scrie

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$$

care este valoarea medie a funcţiei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ pe intervalul [0, 1] şi a cărei limită este $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$.

361. a) $\ln \omega = \frac{1}{n}(u_1 \ln u_1 + u_2 \ln u_2 + \ldots + u_n \ln u_n)$ care este valoarea medie a funcţiei $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ pe intervalul [0, 1] şi a cărei limită este

$$\lim_{n\to\infty} \ln \omega = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

de unde $\omega = e^{\ln 4 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{e^{\frac{3}{4}}}$

b) Analog limita este $\int_0^1 (1+x)^3 \ln(1+x)dx$ se obţine $4^{\frac{4}{3}} \cdot e^{-\frac{7}{9}}$.

362. Expresia se scrie $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ care este valoarea medie a funcției $f(x)=xe^{-x^2}$ pe intervalul $[0, 1]$ și a cărei limită este $\int_0^1 e^{-x^2}\,x\,dx=\frac{e-1}{2e}$.

363. a) Se împarte intervalul $[0, a]$ în n părți egale prin punctele x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, unde $x_0=0$, $x_1=\frac{a}{n}$, $x_2=\frac{2a}{n}$, $\ldots$, $x_{n-1}=\frac{(n-1)a}{n}$, $x_n=a$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)=\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{2^2\cdot a^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2a^2}{n^2}\right)\frac{a}{n}$$ unde $f(x)=x^2$.

Cum $f(-x)=f(x)$ suma luată pe $[0, a]$ este egală cu suma luată pe $[-a, 0]$. După definiția integralei definite

$$\int_{-a}^{a} x^2dx=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)=2a^3\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{2a^3}{3}.$$

b) Procedînd ca mai sus

$$\int_0^a x^3dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{n^3}+\frac{2^3a^3}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^3a^3}{n^3}\right)\frac{a}{n}=$$

$$=a^4\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}=a^4\lim\frac{[(n-1)n]^2}{4n^4}=\frac{a^4}{4}.$$

c) Se împarte intervalul $[0, \pi]$ în n părți egale

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\frac{\pi}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=2.$$ (S-a folosit formula de însumare a sinusurilor cu a cele în progresie aritmetică vol. I ex. 51.)

364. Se efectuează schimbarea de variabilă $a+b-x=u$, $a\to b$; $b\to a$, $dx=-du$

$$\int_a^b x\,f(x)dx=\int_b^a(a+b-u)f(a+b-u)(-du)=\int_a^b=(a+b-u)f(a+b-u)du=\int_a^b(a+b-u)\,f(u)\,du=(a+b)\int_a^b f(u)\,du-\int_a^b uf(u)du,$$ variabila u care figurează în integralele din membrul al doilea poate fi notată în mod arbitrar, x spre exemplu:

$$\int_a^b x\,f(x)dx=(a+b)\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b x\,f(x)dx$$

așadar

$$\int_a^b x\,f(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

365. Se consideră funcţia complexă $f(x) = P(x) + i\,Q(x)$ de variabilă reală x $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt presupuse integrabile pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Aceasta asigură existenţa integralelor

$$\int_\alpha^\beta f\,dx \text{ şi } \int_\alpha^\beta |f|dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{P^2 + Q^2}\,dx$$

inegalitatea :

1) $$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|dx, \quad \alpha < \beta$$

provine dintr-o trecere la limită a inegalităţii analoage asupra sumelor lui Riemann

$$|\sum(x_j - x_{j-1})f(\xi_j)| \leqslant \sum(x_j - x_{j-1})|f(\xi_j)|$$

x_i sînt punctele de diviziune ale intervalului $[\alpha, \beta]$ şi ξ_j este un punct al intervalului (x_{j-1}, x_j). Pentru a demonstra inegalitatea lui Schwarz se aplică inegalitatea 1) funcţiei $f^2 = P^2 - Q^2 + 2i\,PQ$ care are ca modul $P^2 + Q^2$. Avem :

$$\left|\int_\alpha^\beta (P^2 - Q^2 + 2i\,PQ)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta (P^2 + Q^2)dx.$$

Se ridică la pătrat şi se pune în evidenţă pătratul modulului

$$[\int_\alpha^\beta (P^2 - Q^2)dx]^2 + 4[\int_\alpha^\beta P\cdot Q\ dx]^2 \leqslant [\int_\alpha^\beta (P^2 + Q^2)\,dx]^2$$

de unde

$$\left[\int_\alpha^\beta P\cdot Q\,dx\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}\left[\int_\alpha^\beta (P^2 + Q^2)dx\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\int_\alpha^\beta (P^2 - Q^2)\,dx\right]^2$$

Aşadar $$[\int_\alpha^\beta PQ\,dx]^2 \leqslant \int_\alpha^\beta P^2\,dx \int_\alpha^\beta Q^2\,dx.$$

366. p şi q fiind numere mai mari ca 1, astfel ca :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ sau } q = \frac{p}{p-1}.$$

Dacă a şi b sînt numere pozitive, ele satisfac inegalitatea

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

se notează $\varphi(b) = \frac{b^q}{q} + \frac{a^p}{p} - ab$. Se studiază variaţia funcţiei $\varphi(b)$. Ea este pozitivă pentru $b = 0$; şi tinde către $+\infty$ cînd $b \to \infty$.

Pe de altă parte : $\varphi'(b) = b^{q-1} - a$; $\varphi(b)$ se anulează pentru $b = a^{\frac{1}{q-1}}$, adică $b^q = a^{\frac{q}{q-1}} = a^p$, $ab = a^{1+\frac{1}{q-1}} = a^{\frac{q}{q-1}} = a^p$. Avem atunci $\varphi(b) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^p = 0$, $\varphi(b)$ admite deci un minimum nul cînd $a^p = b^q$.

Rezultă inegalitatea

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Observații : Dacă $p = q = 2$, inegalitatea de mai sus, devine inegalitatea evidentă

$$ab < \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Inegalitatea $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, are o interpretare geometrică simplă.

Fie $f(x)$ o funcție continuă și monotonă între $x = 0$ și $x = b$. Fie $g(x)$ funcția inversă a funcției $f(x)$; dacă $y = f(x)$, $x = g(y)$.

Fie a un număr pozitiv. Figura 8, figura 9

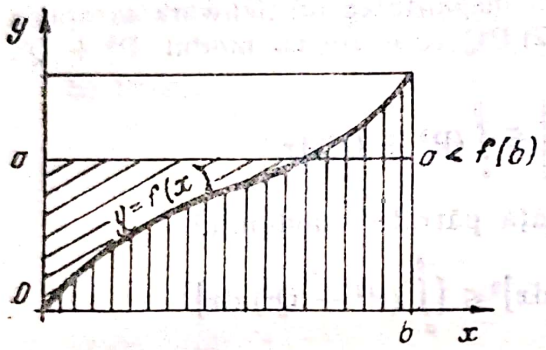

Fig. 8

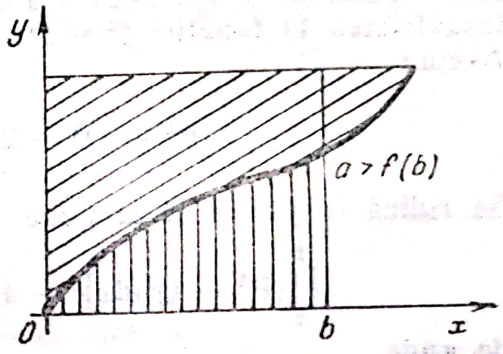

Fig. 9

Prin compararea ariilor se vede că :

$$ab \leqslant \int_0^b f(x)dx + \int_0^a g(x)dx$$

egalitatea avînd loc dacă $a = f(b)$.

Luînd în particular $f(x) = x^{q-1}$, $q > 1$. Atunci $g(x) = x^{p-1}$ cu condiția $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și se obține

$$ab \leqslant \int_a^b x^{q-1}dx + \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{b^q}{q} + \frac{a^p}{p}.$$

2) Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții pozitive integrabile pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Se notează :

$$a = \frac{f(x)}{\left(\int_\alpha^\beta f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ și } b = \frac{g(x)}{\left(\int_\alpha^\beta g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Inegalitatea de la punctul precedent devine

$$\frac{fg}{\left(\int_\alpha^\beta f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\alpha^\beta g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{f^p}{p\int_\alpha^\beta f^p dx} + \frac{g^q}{q\int_\alpha^\beta g^q dx}.$$

Se integrează cei doi membrii ai inegalității de la α la β. Membrul al doilea datorită relației $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ devine egal cu 1. Se obține inegalitatea lui Hölder

$$\int_\alpha^\beta f\ g\ dx \leqslant \left(\int_\alpha^\beta f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

În cazul unei funcții de semn variabil se scrie sub forma:

$$\left|\int_\alpha^\beta f\,g\,dx\right| \leqslant \left(\int_\alpha^\beta |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ea conține inegalitatea lui Schwarz cînd $p=q=2$. Această inegalitate devine o egalitate, dacă cu notațiile de la punctul precedent $a^p=b^q$. Aceasta înseamnă că raportul $\frac{|f(x)|^p}{|g(x)|^q}$ are o valoare constantă independentă de x, în afară poate de anumite valori izolate ale lui x care nu modifică valoarea integralelor.

367. 1. Se știe că Δ este descriminantul trinomului în R:

$$\int_a^b [f(x)+kg(x)]^2 dx = k^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx + 2k \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Dacă $\Delta=0$, acest trinom are o rădăcină dublă $-\lambda$, și

$$\int_a^b [f(x)-\lambda\,g(x)]^2\,dx = 0$$

funcția $(f-\lambda g)^2$ este continuă și pozitivă în $[a, b]$; integrala sa este nulă; ea este deci nulă și $f=\lambda g$.

2. Pentru că funcția f este continuă și strict pozitivă în $[a, b]$, funcțiile $\frac{1}{f}$, $\varphi=\sqrt{f}$ și $\psi=\frac{1}{\varphi}$ sînt definite și continue în $[a, b]$.

Aplicînd inegalitatea lui Schwarz funcțiilor φ și ψ se obține:

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\psi(x)]^2 dx$$

fie:

$$\left(\int_a^b dx\right)^2 = (b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = P_f.$$

Produsul P_f este minorat de $(b-a)^2$.

Rezultatul primei părți necesită că P_f este egal cu $(b-a)^2$, dacă și numai dacă $\varphi=\lambda\psi$, adică ridicînd la pătrat se obține $f=\lambda^2\frac{1}{f}$. Este necesar și suficient ca funcția f să fie o constantă.

Scanned with OKEN Scanner

3. Definind funcțiile f și $\frac{1}{f}$ prin

$$a \leqslant x \leqslant a + \frac{b-a}{3} \rightarrow f(x) = M \rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{M}$$

$$a + 2\frac{b-a}{3} \leqslant x \leqslant b \rightarrow f(x) = \frac{1}{M} \rightarrow \frac{1}{f(x)} = M.$$

în intervalul $\left[a + \frac{b-a}{3},\ a + 2\frac{b-a}{3} \right]$, f este o funcție continuă descrescătoare arbitrară, de exemplu funcția afină definită prin:

$$f(x) = M - \frac{3}{b-a}\left(M - \frac{1}{M}\right)\left(x - a - \frac{b-a}{3}\right)$$

și $\frac{1}{f}$ inversa acestei funcții.

Este evident, pentru că funcțiile f și $\frac{1}{f}$ sînt pozitive avem

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\geqslant \int_a^{a+\frac{b-a}{3}} f(x)dx = \frac{b-a}{3}M \\ \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx &\geqslant \int_{a+\frac{2(b-a)}{3}}^{b} \frac{1}{f(x)}dx = \frac{b-a}{3}M \end{aligned}\right\} \rightarrow P_f \geqslant \frac{(b-a)^2}{g}M^2$$

M fiind un număr arbitrar. P_f poate deci lua valori arbitrar de mari.

368. 1) Suma S_n este integrala funcției în scară φ_n, în $[a, b]$, definită prin:

$$\varphi_n(x) = f(\xi_i^{(n)}) \text{ dacă } x_{i-1}^{(n)} < x < x_i^{(n)} \text{ și } \varphi(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$$

Funcția f este uniform continuă în $[a, b]$; deci

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0 \text{ astfel ca } |x' - x| < \eta \rightarrow |f(x') - |f(x)| < \varepsilon.$$

Să determinăm atunci N astfel ca $l_n < \eta$ dacă $n > N$

$$\rightarrow x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} < l_n < \eta \rightarrow |f(x) - f(\xi_i^n)| < \varepsilon \text{ dacă } x_{i-1}^{(n)} < x < x_i^{(n)}$$

orice x din $[a, b]$ aparține unui interval $]x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}[$ unde este unul din $x_i^{(n)}$

$$\forall\ x \in [a,\ b],\ n > N \rightarrow |f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$$

șirul de funcții φ_n converge uniform către f în $[a, b]$ și prin definiția integralei:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular considerat

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{b-a}{n} f(x_i^{(n)}) \right] = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n} \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

2) Se observă că

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a^{\frac{i}{n}} - a^{\frac{i-1}{n}}}{a^{\frac{i-1}{n}}}.$$

Dacă se ia pentru f, funcția $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru subdiviziunea σ_n a intervalului $[1, a]$ șirul $a^{i/n}$ și pentru $\xi^{(n)}$ numărul $x_{i-1}^{(n)}$, suma S_n de la 1) este

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} [x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}] f(x_i^{(n)}) = n(a^{1/n} - 1)$$

Lungimea fiecăruia din intervale este:

$$a^{i/n} - a^{(i-1)/n} < a(a^{i/n} - 1)$$

marginea superioară l_n a lungimilor este inferioară lui $a(a^{1/n} - 1)$ și are ca limită 0. Se poate aplica rezultatul de la 1).

$$\lim_{n \to \infty} n(a^{1/n} - 1) = \int_1^a \frac{dx}{x}.$$

3) Derivabilitatea la dreapta oricărui număr x cuprins între 0 și 1, i se poate asocia intregul n definit prin

$$\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Funcția exponențială fiind crescătoare, rezultă:

$$a^{1/n} - 1 \leqslant a^x - 1 \leqslant a^{1/(n-1)} - 1$$

de unde:

$$(n-1)(a^{1/n} - 1) < \frac{a^x - 1}{x} < n(a^{1/(n-1)} - 1)$$

cînd $x \to 0$; $n \to \infty$,

$$(n-1)(a^{1/n} - 1) = \frac{n-1}{n} [n(a^{1/n} - 1)] \to \int_1^a \frac{dx}{x}.$$

$$n(a^{1/n-1} - 1) = \frac{n}{n-1} [(n-1)a^{1/(n-1)} - 1] \to \int_1^a \frac{dx}{x}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci $\frac{a^x-1}{x} \to \int_1^a \frac{dx}{x}$ (derivată la dreapta).

Dacă $x<0$ atunci $x=-|x|$;

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^{-|x|}-1}{-|x|}=a^{-|x|}\,\frac{1-a^{|x|}}{-|x|}=a^{-|x|}\,\frac{a^{|x|}-1}{x}$$

cînd $x\to 0$, $\frac{a^{|x|}-1}{|x|}\to\int_1^a\frac{dx}{x}$.

369. Se face $x^2-4=t\to\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} x\arcsin(x^2-4)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\arcsin t\,dt=$ $=0$, funcția fiind impară și intervalul simetric față de 0.

370. $\sqrt{\ln x}=t\to 2\int_0^1\frac{t^2dt}{(1+t)^2}=2\ln 2-\frac{5}{4}$.

371. Se integrează prin părți, $u=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $du=\frac{2x}{|x|(1+x^2)}dx$

$$dv=dx,\quad v=x$$

$$\int_{-1}^{0}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big|_{-1}^{0}+2\int_{-1}^{0}\frac{x^2dx}{|x|(1+x^2)}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\ln 2$$

372. $u=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$, $du=\frac{x+1}{|x+1|(1+x^2)}dx$, $dv=dx$, $v=x$

$$\int_0^1\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}dx=x\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

373.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+\sin^2x}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{a}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2a}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2x+\sin^2x}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{a}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\to$$

$$\to\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2x+\sin^2x}=\frac{\pi}{a}.$$

374. $\frac{2\pi}{a^2-b^2}$.

375. $\int_0^{2\pi} = 2\int_0^{\pi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$.

($\varepsilon = \pm 1$ după semnul lui c).

376. $\frac{2\pi\ |c|}{(c^2 - a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

377. Se calculează $I_{2n+1} - I_{2n-1}$ și se deduce

$$I_{2n+1} - I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos 2nx}{\sin x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx\,dx = 0.$$

Deci

$$I_{2n+1} = I_{2n-1} = \ldots = I_3 = I_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+2} - I_{2n} = (-1)^n \frac{2}{2n-1},\quad J_2 = 2$$

$$I_{2n} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$$

$$I_n - J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}\cos(4n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(4n+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

Se face $\frac{x}{2} = t$ și se obține $K_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{1}{2n+1}$. Se știe că $\operatorname{arctg} x =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}.$$

Pentru $x = 1$ conform regulii lui Abel avem $\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$.

378. Se face $x = t + 2$.

379. Pentru $\lambda \in R$ avem $\int_a^b [f(x) + \lambda\, g(x)]^2 dx \geqslant 0$

sau $\int_a^b [f^2(x) + 2\lambda\, f(x)g(x) + \lambda^2\, g^2(x)]\,dx \geqslant 0$

Scanned with OKEN Scanner

Trinomul în λ fiind pozitiv, are rădăcini complexe deci $\Delta < 0$

$$\Delta = \int_a^b [f(x)g(x)]^2\,dx - \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx < 0$$

de unde rezultă inegalitatea cerută (Schwarz).

380. (1) Se obține imediat prin schimbarea de variabilă

$$u = a + b - x$$

(2) Făcînd $a = 0$ rezultă

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(b - x)dx$$

(3) $$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a - x)dx$$

făcînd $2a - x = t \to \int_0^a f(2a - x)dx = \int_a^{2a} f(x)dx$ de unde rezultă formula (3).

381. După formula (2)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{ctg} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)\,dx = 0.$$

382. După formula (2)

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - I$$

$$\text{de unde } 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx,\ I = \frac{\pi^2}{4}.$$

383. Se aplică formula (2)

$$I = \int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos\left(\frac{x}{a} - 1\right) dx$$

$$2I = \int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} \left[\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \arccos\left(\frac{x}{a} - 1\right)\right] dx$$

paranteza fiind egală cu π, rezultă

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3\pi^2 a^4}{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

384. După aceeaşi formulă (2)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x}\,dx.$$

Se deduce $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

385. Formula (2) arată că:

$$I = J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$$

$$I + J = \frac{\pi}{2} \text{ deci } I = \frac{\pi}{4}.$$

386. Se aplică (2) şi se obţine

$L_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ este calculată mai jos.

387. a) Integrînd prin părţi, se obţine:

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^{\alpha-1}x\,d(\cos x) = -\left|\sin^{\alpha-1}x\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{\alpha-2}x\cos^2 x\,dx.$$

Partea integrată fiind nulă şi înlocuind $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ se obţine relaţia $I = \frac{\alpha - 1}{\alpha} I_{\alpha-2}$. Dacă $\alpha = n$, se aplică repetat această formulă şi se deduce:

$$n \text{ par}: I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$n \text{ impar}: I_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots n}.$$

b) Oricare ar fi întregul n, avem pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin^n x > \sin^{n+1} x$, şi integrînd de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ se găseşte $I_n > I_{n+1}$. Pentru că $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$ rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = 1$. De altă parte $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} < I_{n-1}$ şi prin urmare

$$\frac{n-1}{n} < \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} < 1 \text{ deci } \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} = 1.$$

Din relaţia de recurenţă $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ amplificînd cu I_{n-1} se obţine $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}\cdot I_{n-2}$.
Produsul considerat este independent de n; el valorează

$$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n \to \infty$ se vede că

$$nI_n^2 = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}} \text{ de unde } I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{\frac{I_n}{I_{n-1}}}.$$

Rezultă că I_n este infinit mic echivalent cu $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

388. $u = \ln \sin x \quad du = \operatorname{ctg} x\, dx$

$dv = dx \quad v = x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = \left| x \ln \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cos x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cos x\, dx$. Cum integrala din dreapta există rezultă existența celei din stînga.

389. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \left| \ln x \operatorname{arctg} x \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx$

$$= -\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx.$$

Existența integralei din membrul doi implică existența integralei date.

390. $\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \ln x \arcsin x \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$. Deci integrala dată există.

391. Integrînd prin părți de două ori succesiv, ținînd seama de continuitatea funcțiilor conținute se obține:

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx = \left| \frac{(x-a)(x-b)}{2} f'(x) \right|_a^b - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx = \left| \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) \right|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \int_a^b f(x)\,dx.$$

egalitatea propusă se deduce imediat.

Această formulă dă o evaluare a erorii făcute în calculul aproximativ al unei integrale prin metoda trapezelor. Primul termen $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ este evaluarea ariei trapezului; eroarea este dată de ultima integrală.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă M este marginea superioară a lui $f''(x)$:

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M(b-a)^3}{12}.$$

Dacă $[a, b]$ este unul din intervalele de împărţire a intervalului $[\alpha, \beta]$ în n intervale egale $b - a = \frac{\beta-\alpha}{n}$ şi suma erorilor asupra celor n trapeze este:

$$n \times \frac{M}{12}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 = \frac{M(\beta-\alpha)^3}{12n^2}.$$

Formula şi majorarea, sînt valabile în cazul unei funcţii cu valori într-un spaţiu vectorial normat.

392. 1°. Pentru că funcţia f este continuă, funcţia $x \to \int_a^x f(x)dx$ este derivabilă şi are derivata $f(x)$.

Reciproca g a unei funcţii continui monotone este continuă, funcţia $y \to \int_a^y g(t)dt$ are derivata $g(y)$. Funcţia $x \to \int_a^{f(x)} g(t)dt$ este compusa funcţiei f, derivabilă prin ipoteză şi a funcţiei precedente; ea are o derivată egală cu: $g[f(x)]f'(x) = xf'(x)$. (Prin definiţia funcţiei reciproce $x = g[f(x)]$.)

Funcţia F este deci derivabilă şi

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - [xf(x)]' = 0.$$

Studiul direct în cazul general. Se consideră valorile x şi $x + \Delta x$ ale variabilei şi valorile $f(x)$ şi $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$ ale funcţiei. Se presupune $\Delta x > 0$ pentru a preciza sensul inegalităţilor; dar rezultatul nu se schimbă dacă $\Delta x < 0$. Avem:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_{f(x)}^{f(x+\Delta x)} g(t)dt - [(x + \Delta x)(f(x) + \Delta f) - xf(x)]$$

Dar f şi g sînt funcţii crescătoare

$$\Delta x f(x) \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leqslant \Delta x f(x + \Delta x) = \Delta x[f(x) + \Delta f]$$

$$x\Delta f = g[f(x)]\Delta f \leqslant \int_{f(x)}^{f(x+\Delta x)} g(t)dt \leqslant g[f(x + \Delta x)]\Delta f = (x + \Delta x)\Delta f.$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalităţi şi dezvoltînd termenii între paranteze ai lui ΔF se obţine:

$$-\Delta x\Delta f \leqslant \Delta F \leqslant \Delta x\Delta f \leftrightarrow -\Delta f \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x} \leqslant \Delta f$$

cînd $\Delta x \to 0$, $\Delta f \to 0$ (continuitatea funcţiei f); funcţia F are o derivată nulă şi este constantă:

$$F'(x) = F(0) = 0-$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă inegalitatea $v \geqslant f(u)$ nu este verificată, adică $f(u) > v$ și deci $u > g(v)$; schimbînd dacă este necesar f și g care joacă același rol, se poate presupune $v \geqslant f(u)$. Se știe de la 1° că:

$$uf(u) = \int_0^u f(t)dt + \int_0^{f(u)} g(t)\,dt$$

în intervalul $[f(u), v]$, g este minorat prin $g[f(u)] = u$ și deci

$$u[v - f(u)] \leqslant \int_{f(u)} g(t)dt$$

adunînd $uf(u)$ la cei doi membri ai inegalității se obține

$$uv \leqslant \int_0^u f(t)dt + \int_0^{f(u)} g(t)dt + \int_{f(u)}^v g(t)dt = \int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(t)\,dt$$

Se ia $f(u) = u^{p-1}$; funcția f este continuă și strict crescătoare pentru că $p - 1 > 0$; funcția reciprocă g este definită prin

$$g(v) = u \leftrightarrow v = f(u) = u^{p-1} \leftrightarrow u = v^{\frac{1}{p-1}} = v^{q-1}$$

Pentru aceste funcții particulare, inegalitatea devine

$$uv \leqslant \int_0^u t^{p-1}dt + \int_0^v t^{q-1}dt = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

392. 1) $$I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \left| -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \right|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$I_1 = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \left| \frac{-x\cos\pi x}{\pi} \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Aplicînd de două ori formula integrării prin părți, se obține:

$$I_{n+2} = \frac{-x^{n+2}\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{(n+2)x^{n+1}\sin\pi x}{\pi^2}\Bigg|_0^1 - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\int_0^1 x^n\sin(\pi x)dx$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$$

făcînd $n = 0$ și $n = 2$ se obține

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} I_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $0 < x < 1$, şirul x^n este strict descrescător:

$$x^n \sin(\pi x) > x^{n+1}\sin(\pi x) \to \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx > \int_0^1 x^{n+1}\sin(\pi x)dx$$

mai mult dacă $0 < x < 1$,

$$0 < x^n \sin(\pi x) < x^n \to 0 < I_n < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

şirul I_n este strict descrescător şi are limita 0.

393. 1) Se notează prin G primitivele funcţiei g, care este nulă pentru valoarea a. Dacă f are pentru orice valoare a lui x o derivată f(x) şi dacă funcţia f′ este continuă, avem

$$1) \qquad \int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = [f(t)G(t)]\frac{b}{a} - \int_a^b f'(t)G(t)dt$$

Dacă pentru un număr finit de valori $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ funcţia f nu este derivabilă sau derivata f′ nu este continuă, se scrie formula precedentă pentru fiecare din intervalele $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ şi adunînd ecuaţiile obţinute se obţine formula 1).

Prin ipoteză funcţia f este monotonă; înlocuind dacă este necesar această funcţie prin opusa sa, noi o vom presupune crescătoare. Derivata f′ a funcţiei f crescătoare este pozitivă funcţia G este continuă, ipotezele primei formule a mediei sînt verificate pentru funcţiile f′ şi G:

$$\int_a^b f'(t)G(t)\,dt = G(\xi)\int_a^b f'(t)dt = G(\xi)[f(b) - f(a)]$$

Dacă f′ este continuă, f este o primitivă a lui f′ şi se ştie că:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Dacă f′ nu este continuă se aplică rezultatele precedente intervalelor $[x_i, x_{i+1}]$ definite prin punctele de discontinuitate şi se face suma egalităţilor obţinute).

Relaţia (1) devine atunci:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] = f(a)G(\xi) + f(b)[G(b) - G(\xi)] =$$

$$= f(a)\int_a^\xi g(t)dt + f(b)\int_\xi^b g(t)dt$$

2) Pentru fiecare din funcţiile f se poate scrie

$$\int_a^b f_n(t)G(t)dt = f_n(b)G(b) - G(\xi)[f_n(b) - f_n(a)]$$

prin ipoteză şirul f_n converge uniform către f; funcţia G este mărginită; şirul f_nG converge deci uniform către fG şi

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)G(t)\,dt = \int_a^b f(t)G(t)dt$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate extrage din şirul ξ_n un şir parţial ξ_{n_i} convergent (consecinţa teoremei lui Bolzano-Weierstrass) şi limita ξ aparţine intervalului $a,\ b$; continuitatea funcţiei G conduce la concluzia că şirul $G(\xi_{n_i})$ are ca limită pe $G(\xi)$. Şirul parţial

$$\int_a^b f_{x_i}(t)G(t)dt \text{ extras din şirul convergent}$$

$$\int_a^b f_n(t)G(t)dt \text{ are aceeaşi limită ca şi acesta şi deci}$$

$$\int_a^b f(t)G(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_{n_i}(t)G(t)dt = f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)]$$

se regăseşte rezultatul din enunţ.

394. Luînd ca variabilă $u = -x$, se obţine

$$I(a,\ b) = \int_{-a}^{-b} \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}(-du) = -I(-a,\ -b)$$

Dacă a şi b sînt două numere de acelaşi semn, $x = \frac{1}{v}$ defineşte o schimbare de variabilă continuă în $[a,\ b]$ şi

$$I(a,\ b) = \int_{1/a}^{1/b} \frac{(1-v^{-2})(-v^{-2}dv)}{(1+v^{-2})\sqrt{1+v^{-4}}} = \int_{1/a}^{1/b} \frac{(1-v^2)dv}{(1+v^2)\sqrt{1+v^4}} = I\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$$

în particular dacă $b = \frac{1}{a}$ se observă că:

$$I\left(a,\ \frac{1}{a}\right) = I\left(\frac{1}{a},\ a\right) = -I\left(a,\ \frac{1}{a}\right) = 0$$

2) Funcţia $x \to t = x + \frac{1}{x}$ este continuă şi derivabilă dacă $x \neq 0$ şi strict crescătoare dacă $x \geqslant 1$ pentru că:

$$dt = \frac{x^2-1}{x^2}dx$$

Dacă a şi b sînt superiori lui 1, această funcţie defineşte un homeomorfism diferenţiabil a lui $[a,\ b]$ şi $[\alpha,\ \beta]$ (se notează)

$$\alpha = a + \frac{1}{a};\ \beta = b + \frac{1}{b}\Big)$$

$$I(a,\ b) = \int_\alpha^\beta \frac{-x^2dt}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \int_\alpha^\beta \frac{-dt}{t\sqrt{t^2-2}} = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{t}\right|_\alpha^\beta$$

$$I(a,\ b) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1} = f(a,\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă a și b sînt cuprinși între 0 și 1, inversele lor sînt mai mari ca 1 și

$$I(a,\ b) = I\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right) = \mathrm{f}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right) = \mathrm{f}(a,\ b)$$

dacă $a \leqslant 1 \leqslant b$ se obține:

$$I(a,\ b) = I\left(a,\ \frac{1}{a}\right) + I\left(\frac{1}{a},\ b\right) = I\left(\frac{1}{a},\ b\right) = \mathrm{f}\left(\frac{1}{a},\ b\right) = \mathrm{f}(a,\ b)$$

valoarea lui $I(a,\ b)$ este deci cunoscută.
Dacă a și b sînt ambii negativi, se știe că

$$I(a,\ b) = -I(-a,\ -b) = -\mathrm{f}(-a,\ -b) = \mathrm{f}(a,\ b)$$

În sfîrșit, funcțiile $a \to I(a,\ b)$ sau $b \to I(a,\ b)$ sînt funcții continui pentru că I este integrala unei funcții continue. Se obține deci luînd a de același semn cu b

$$I(a,\ b) = \lim_{a \to 0} I(a,\ b) = \lim_{a \to 0} \mathrm{f}(a,\ b) = \mathrm{f}(0,\ b)$$

de unde formula generală:

$$I(a,\ b) = I(0,\ b) - I(0,\ a) = \mathrm{f}(0,\ b) - \mathrm{f}(0,\ a) = \mathrm{f}(a,\ b)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin \frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}.$$

395. 1) $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ deci $\cos^{2p} t = \dfrac{1}{2^{2p}} (e^{it} + e^{-it})^{2p} =$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{q=0}^{2p} C_{2p}^q \, e^{2(p-q)it}. \text{ Integralele } \int_0^{2\pi} e^{2(p-q)it} dt$$

sînt nule, dacă $p - q \neq 0$; deci

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^p} C_{2p}^p \, dt = \frac{2}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2} = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p}.$$

2) Se integrează prin părți:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^{2n-1} t (\cos t \, dt) = \sin t \cos^{2n-1} t \Big|_0^{2\pi} + (2n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n-2} t \sin^2 t \, dt$$

Termenul general este nul și

$$I_n = (2n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n-2} t (1 - \cos^2 t) dt = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$$

$$2n I_n = (2n-1) I_{n-1}$$

Înmulțind membru cu membru ecuațiile obținute pentru $n = 1, 2, \ldots, p$ se obține:

$$2 \cdot 4 \ldots 2p \, I_p = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1) I_0 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1) 2\pi$$

Scanned with OKEN Scanner

3) funcția $t \to 1 - x\cos t$, ia toate valorile intervalului $[1 - |x|, 1 + |x|]$; pentru ca logaritmul să fie definit, este necesar și suficient ca aceste valori să fie strict pozitive; adică $|x| < 1$; funcția $t \to \ln(1 - x\cos t)$ este atunci continuă și integrabilă în $[0, 2\pi)$. Se știe că dacă $|x\cos t| < 1$

$$\ln(1 - x\cos t) = -\sum_{1}^{+\infty} \frac{x^k \cos^k t}{k}.$$

Seria este absolut convergentă în raport cu t în $[0, 2\pi]$, pentru că

$$\left|\frac{x^k \cos^k t}{k_k}\right| < |x^k| = |x|^k$$

și seria geometrică $|x|^k$ este convergentă. Se poate atunci integra termen cu termen

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)\,dt = -\sum_{1}^{k} \frac{x^k}{k} \int_0^{2\pi} \cos^k t\,dt$$

Dacă k este impar integrala din $\cos^k t$ în intervalul $[0, 2\pi]$ este nulă; într-adevăr punînd $t = u + \pi$ se vede că

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^k t\,dt = -\int_0^{\pi} \cos^k u\,du$$

Dacă k este par și egal cu $2p$, integrala a fost calculată, adică I_p:

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)dt = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{2p} 2\pi \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots(2p)}$$

Seria obținută converge cu siguranță dacă $|x| < 1$; raza sa de convergență este cel mult egală cu 1. Se verifică că este exact egală cu 1 utilizînd regula lui D'alambert.

Raportul a doi termeni consecutivi este egal cu

$$x^2 \frac{2p}{2p+2} \cdot \frac{2p+1}{2p+2} \text{ are ca limită } x^2.$$

4) Suma unei serii întregi este derivabilă în intervalul de convergență și derivata sa este suma seriei derivatelor (derivate termen cu termen)

$$F'(x) = -2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p-1} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}$$

Se verifică ușor (desfășurarea binomului) că:

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} x^{2p} \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde :

$$F'(x) = \frac{2\pi}{x}\left[1 - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

și că $F(0) = 0$

$$F(x) = \int_0^x \frac{2\pi}{u}\left[1 - (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\right] du$$

se ia ca variabilă $v = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = 2\pi \int_1^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{1}{v}\right)\frac{v\,dv}{1 - v^2} =$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dv}{v + 1} = 2\pi[\ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \ln 2)$$

396. $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}} = 1$ pentru $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ deci integrala este convergentă.

397. Se cercetează dacă există $\alpha > 1$ astfel ca

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = l,\ l(\text{finit}).$$

Se aplică regula lui l'Hospital și se găsește că pentru $\alpha = 2 > 1$ limită finită, deci integrala convergentă.

398. $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}$ pentru $\alpha = 2 > 1$ este finită, deci integrala este convergentă. Pentru limită inferioară avem

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{12}.$$

399. $\frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots} < \frac{1}{1 + x^2}$, integrala este majorată de o integrală convergentă, este deci convergentă.

400. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha f(x) = 1$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ și $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x)^\alpha f(x) = 1$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, deci integrala este convergentă.

401. $x = 1$ fiind rădăcină simplă a numitorului integrala este convergentă

402. $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\cos x-\cos 0}}=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 0}}$ pentru $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$ deci integrala este convergentă.

403. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}=0$ și $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha}\ln x}{\sqrt{1-x^2}}=0$ pentru $0<\alpha<1$ deci convergentă.

404. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln\sin x=0$ pentru $0<\alpha<1$ deci integrala este convergentă.

405. Se notează $k=\sin\alpha$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ și integrala devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln|\sin^2\theta-\sin^2\alpha|\,d\theta.$$ Se cercetează

$$\lim_{\theta\to\alpha}(\theta-\alpha)^p\ln|\sin^2\theta-\sin^2_{\alpha}|=$$

$$=\lim_{\theta\to\alpha}\frac{(\theta-\alpha)^p}{(\sin\theta-\sin\alpha)^p}\cdot\lim_{\theta\to\alpha}(\sin\theta-\sin\alpha)^p\ln|\sin^2\theta-\sin^2\alpha|=$$

$$=\frac{1}{\cos^p\alpha}\lim_{\theta\to\alpha}(\sin\theta-\sin\alpha)^p\cdot\ln|\sin^2\theta-\sin^2\alpha|=0$$

pentru $0<p<1$ deci integrala este convergentă.

406. $\int_0^{\alpha}\dfrac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\int_0^{1}\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx+\int_1^{\infty}\dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ dar

$$\int_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\int_0^{1}\frac{dx}{x^{1-a}(1+x)}$$ care este convergentă dacă

$1-a<1$ adică $a>0$ iar $\int_1^{\infty}\dfrac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ este convergentă dacă

$$\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}\cdot\frac{x^{a-1}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}x^{\alpha+a-2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$ există și este finită, și

aceasta are loc dacă $\alpha+a-2=0$; $\alpha=2-a$ și $2-a>1$ deci $a<1$ deci pentru $0<a<1$ integrala propusă este convergentă.

407. $\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^{1}x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ dar

$$\int_0^{1}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^{1}\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\,dx$$ care este convergentă pentru

$1-p<1$ deci $p>0$, iar a doua integrală

$$\int_1^8 x^{p-1}e^{-x}dx = \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+\ldots}\,dx <$$

$$< \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}}\,dx.$$ Ultima integrală este convergentă. Integrala fiind majorată de o integrală convergentă este convergentă.

408. Pentru limita inferioară se poate scrie

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx$$

care are sens la limita inferioară dacă $1-p<1$, adică $p>0$ iar pentru limita superioară se scrie

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx$$

care are sens pentru $1-q<1$ deci $q>0$. Aşadar pentru $p>0$, $q>0$ integrala este convergentă.

409. 1) Funcţia de integrat este majorată de e^{-x} deci

$$F(X) = \int_0^x e^{-x}\sin^{2n}x\,dx < \int_0^x e^{-x}dx = 1-e^{-x} < 1$$

cînd X creşte de la 0 la ∞, $F(X)$ creşte şi este majorată. Marginea sa superioară l este de asemenea mărginită $0<l\leqslant 1$.

2) Integrînd de două ori prin părţi se deduce

$(4n^2+1)I_n = 2n(2n-1)I_{n-1}$; cum $I_0=1$ se obţine

$$I_n = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)2k}{1+4k^2}$$ sau transformînd fracţia, $$I_n = \sum_{=1}^n \frac{\left(1-\frac{1}{2k}\right)}{1+\frac{1}{4k^2}}$$

şi cum numitorul este superior lui 1, avem

$$I_n < \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{1}{2k}\right) = A_n$$

3) $\ln A_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$; seria $u_k = \ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ cu toţi termenii negativi, echivalentă cu $v_k = -\frac{1}{2k}$ este divergentă cu suma $-\infty$. Rezultă că $A_n \to 0$ deci şi $I_n \to 0$ după dubla inegalitate $0 < I_n < A_n$.

Scanned with OKEN Scanner

410. Se notează: $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ și

$$\delta_{n;k} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f(x) - f(a_k)]\,dx$$

f fiind derivabilă, formula creșterilor finite conduce la:
$\forall x \in [a_{k-1}, a_k]$; $m_k(a_k - x) \leqslant f(a_k) - f(x) \leqslant M_k(a_k - x)$
oricare ar fi k; unde m_k și M_k reprezintă marginea inferioară și marginea superioară a lui f′ pe $[a_{k-1}, a_k]$; deci prin integrare:

$$m_k \frac{(b-a)^2}{2n^2} = m_k \frac{(a_k - a_{k-1})^2}{2} \leqslant -\delta_{k;n} \leqslant M_k \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k;n} \text{ deci:}$$

$$-\frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n} \leqslant \Delta_n \leqslant -\frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n}$$

cele două însumări sînt sume Darboux ale funcției f′; dacă această funcție este integrabilă avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = -\frac{b-a}{2} \int_a f'(x)\,dx$$

dacă f′ este continuă, f este o primitivă a lui f′ și deci:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\Delta_n = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)]$$

putem minora pe W_n, avem

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)$$

Se deduce $0 \leqslant W_n \leqslant u_n - u_{n+1} = v_n$ deci W_n este convergentă.

2) Se studiază suma primilor $n+1$ termeni ai lui W_n

$$\sum_{i=0}^{n} W_i = \sum_{i=0}^{n} u_i - \int_0^{n+1} f(x)\,dx = S_n - \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Se deduce $\dfrac{S_n}{\int_0^n f(x)\,dx} = 1 + \dfrac{\sum_0^n W_i}{\int_0^n f(x)\,dx} + \dfrac{\int_n^{n+1} f(x)\,dx}{\int_0^n f(x)\,dx}$

La limită ultimii doi termeni ai egalității tind către zero. Rezultă proprietatea cerută.

412. 1) $\forall x$, $f(x)$ este cuprins între $-|f(x)|$ și $|f(x)|$

$$0 \leqslant |f(x)| + f(x) \leqslant 2|f(x)|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $2\int_a f(x)\,dx$ este convergentă atunci este convergentă și

$\int_a^b \{|f(x)| + f(x)\}dx$. Scăzînd integrala convergentă

$\int_a^b (f(x))dx$ se vede că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2) Pentru că $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$; convergența absolută a integralei I rezultă din convergenta lui $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Se verifică de asemenea convergența absolută a lui J pentru $x = 0$ și $x = \infty$.

3) Integrînd $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ prin părți se obține

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ultima integrală este absolut convergentă; convergentă (simplă) a integralei

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ rezultă.}$$

413. Pentru x destul de mic $x < \frac{1}{e}$, avem $\frac{1}{\sqrt{x}|\ln x|} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Convergența absolută a integralei, deci convergența sa rezultă. Se simplifică expresia făcînd $\sqrt{x} = t$, de unde

$I(a) = \int_0^a \frac{dt}{\ln t}$. Formula mediei permite de a scrie integrala sub forma

$$I(a) = \frac{\sqrt{a}}{\ln \xi} \text{ cu } 0 < \xi < \sqrt{a}$$

Deci

$I(a)\cdot\ln(a) = \frac{\sqrt{a}\ln a}{\ln \xi}$. Cînd $a \to 0$ numărătorul $\to 0$ și numitorul către ∞ ($\xi \to 0$). Limita este deci nulă.

414. 1) În $[(n-1)\pi, n\pi]$ sinusul este pozitiv dacă n este impar și negativ dacă n este par, deci u_n are semnul lui $(-1)^{n-1}$,

$$|u_n| = (-1)^{n-1}u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt$$

Funcția $t \to \frac{t}{1+t^2}$ este descrescătoare dacă $t \geqslant 1$ se obține deci un majorant și un minorant al lui $|u_n|$ înlocuind

$$\frac{1}{1+t^2} \text{ prin } \frac{(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\cdot\pi^2} \text{ și } \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}:$$

$$\frac{(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt \geqslant |u_n| \geqslant \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt$$

însă $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt = 2$. Se deduce

$$\frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi} \geqslant |u_n| \geqslant \frac{2n\pi}{1-n^2\pi^2} \geqslant u_{n+1}$$

Din care rezultă că șirul $|u_n|$ este descrescător cu limita zero, pentru că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2} = 0.$$

Suma $U = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} u_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{t}{1+t^2}\sin t\,dt$

Pentru a demonstra convergența integralei I trebuie cercetat dacă $\int_0^{x}\frac{t}{1+t^2}\sin t\,dt$ are limită cînd $x \to \infty$; Se asociază lui x un număr natural n ; $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$

$$\left|\int_0^{x}\frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt - \int_0^{2\pi}\frac{t\sin t}{1+x^2}\,dt\right| = \left|\int_{n\pi}^{x}\frac{t\sin t}{1+x^2}\,dt\right| < |u_{n+1}|$$

$$\left|\int_0^{n\pi}\frac{t\sin t}{1+x^2}\,dt - u_{n+1}\right| \leqslant \int_0^{x}\frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{n\pi}\frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt + |u_{n+1}|$$

Cînd $n \to \infty$ și x la fel cele două mărimi laterale au limita U; integrala este deci convergentă și este egală cu U.

2) Seria u_n este minorată prin seria divergentă $\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}$ care are suma infinită.

$$\sum_{1}^{n}|u_n| = \sum_{1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{t\,|\sin t|}{1+t^2}\,dt = \int_0^{n\pi}\frac{t\,|\sin t|}{1+t^2}\,dt$$

Funcția nu este integrabilă în $[0, \infty]$. Integrala I nu este absolut convergentă.

3) Nu se schimbă convergența integralei înlocuind, dacă este necesar marginea inferioară a, a integralei prin $(n_0-1)\pi$ superior lui a și zerourile lui A și ale numărătorului $A'B - AB'$ ale derivatei lui $\frac{A}{B}$. Pentru valori

superioare lui $(n_0 - 1)\pi$, funcția $\frac{A}{B}$ are un semn constant (îl presupunem pozitiv) și este monotonă, ea este descrescătoare pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{A}{B} = 0$.

Seria cu termen general $v_n = \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t\, dt$ unde $n > n_0$ este alternată și convergentă

$$\sum_{n_0}^{n} v_k = \int\limits_{(n_0-1)\pi}^{n\pi} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t\, dt.$$

Se termină demonstrația ca la 1) utilizînd faptul că dacă

$$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$$

$$\left| \int\limits_{(n_0-1)\pi}^{x} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t\, dt - \int\limits_{(n_0-1)\pi}^{n\pi} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t\, dt \right| \leqslant |v_{n+1}|$$

415. Dacă $0 \leqslant x < 1$, $f > 0$

$$\frac{x}{1+x^3} < 1 \text{ și } \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} \to f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$f(x)$ fiind majorată de o funcție integrabilă, este integrabilă.
Se face $x^2 = t$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t^3}} \text{ și apoi } \varphi = \arccos t$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin\varphi\, d\varphi}{(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

416. 1) Funcția $(t^2+1)\frac{P}{Q}$ este continuă pentru $t \geqslant a$ și are limita finită cînd $t \to \infty$, este deci mărginită în $[a, \infty[$ și există un număr k astfel ca

$$\forall t \geqslant a \quad \left| \frac{P(t)}{Q(t)} \sin t \right| \leqslant \left| \frac{P(t)}{Q(t)} \right| \leqslant \frac{k}{t^3+1}$$

Funcția $t \to \frac{k}{t^3+1}$ este integrabilă în $[a, \infty[$ deci $t \to \frac{P(t)}{Q(t)} \sin t$ este absolut integrabilă.

2) Integrînd pe compactul $[0, x]$

$$\int_0^x \frac{t}{t^3+1} \sin t\, dt = -\frac{x\cos x}{x^3+1} + \int_0^x \frac{1-t^3}{(1+t^3)^2} \cos t\, dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

După 1) integrala din dreapta este convergentă, iar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cos x}{x^2+1}=0,\ \text{deci cînd}\ x\to\infty$$

$$\int_0^x\frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt\to\int_0^x\frac{(1-t^2)\cos t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

conform definiției, I este convergentă.

3) Integrînd prin părți

$$\int_0^x\frac{A(t)}{B(t)}\sin t\,dt=-\frac{A(x)\cos x}{B(x)}+\frac{A(a)\cos a}{B(a)}+\int_0^n\cos t\,\frac{A'(t)B(t)-A(t)B'(t)}{B^2(t)}\,dt.$$

Ultima integrală este absolut convergentă pentru că grad $A'B-AB'=$ $=$ grad $A+$ grad $B-1=2$ grad $B-2=$ grad B^2-2, cînd $x\to\infty$ această integrală are limită, funcția $x\to\frac{-A(x)\cos x}{B(x)}$ are limita zero, deci integrala studiată este convergentă.

Observație. Convergența integralei ar putea fi stabilită aplicînd criteriul lui Cauchy și a doua teoremă a mediei; într-adevăr există t_0 astfel ca în $[t_0,\ \infty[$ funcția $t\to\frac{A(t)}{B(t)}$ este monotonă. Dacă x și x' sînt superioare lui t_0

$$\int_x^{x'}\frac{A(t)}{B(t)}\sin t\,dt=\frac{A(x)}{B(x)}\int_x^{\xi}\sin t\,dt+\frac{A(x')}{B(x')}\int_{\xi}^{x'}\sin t\,dt$$

Fiecare integrală din dreapta au valorile absolute inferioare lui 2.

$$\left|\int_x^{x'}\frac{A(t)}{B(t)}\sin t\,dt\right|\leqslant 2\left|\frac{A(x)}{B(x)}\right|+2\left|\frac{A(x')}{B(x')}\right|\to$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x'\to\infty}}\int_x^{x'}\frac{A(t)}{B(t)}\sin t\,dt=0$$

ceea ce dovedește convergența integralei.

417. Punînd $x=t+n\pi$, se poate exprima u_n printr-o integrală pe intervalul fix $[0,\ \pi]$.

Avem

$$u_n=(-1)^n\int_0^{\pi}\varphi(t+n\pi)\sin t\,dt$$

care este o serie alternată, care satisface condițiile clasice de convergență. Avem

$$\forall t\in[0,\ \pi],\ 0<\varphi\,[t+(n+1)\pi]\leqslant\varphi(t+n\pi)$$

de unde rezultă că $|u_{n+1}|<|u_n|$. Pe de altă parte

$$|u_n|\leqslant\varphi(n\pi)\cdot\int_0^{\pi}\sin t\,dt=2\varphi(n\pi)$$

de unde $\lim_{n\to\infty}(u_n)=0$. Seria este convergentă.

Funcția $\varphi(x)\sin x$ păstrează un semn constant (sau fiind nulă) pe $[n\pi, (n+1)\pi]$. Convergența seriei antrenează pe aceea a integralei.

418. Se poate studia direct integrala I, sau aplicînd rezultatul din exercițiul precedent.

Dacă $a > 0$ integrala este absolut convergentă pentru $n > 1$ și simplu convergentă pentru $0 < n < 1$. Dacă $a = 0$, trebuie să se asigure existența integralei pentru $x = 0$.

Se scrie $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{x^{n-1}}$ convergența cere $n<2$. Avem convergență absolută pentru, $1 < n < 2$ și simplă pentru $n \leqslant 1$.

Integralele lui Fresnel se reduc la acest caz, punînd $x^2 = u$ se obține

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du, \quad n = \frac{1}{2}$$

deci avem convergentă simplă.

419. Integrala este convergentă, căci $x = b$ este rădăcina simplă a numitorului.

Se face

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi \text{ ; pentru } x = a \text{ se determină}$$

$$\varphi \text{ din } a\sin^2\varphi = b\sin^2\varphi \to \varphi = 0, \text{ iar pentru } x = b \to \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Se obține

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(b-a)\sin^2\varphi(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$$

420. Integrala are sens la ambele limite căci $x = a$ și $x = b$ sînt rădăcini simple. Făcînd substituția $x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$, se obține

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi$$

421. $x = 0$ și $x = 1$ fiind rădăcini simple, integrala este convergentă. Se face $\frac{1-x}{x} = t^2$ și se obține

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+2\cdot t^2} + \frac{1}{3+2t^2}\right) dt = -\pi\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}.$$

422. $x = 0$, $x = -1$ fiind rădăcini simple integrala este convergentă. Se integrează prin părți.

Se obține $\frac{4}{3}$.

423. $\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2} e^{-x}\sin x\,dx$ este convergentă fiind majorată de

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2} e^{-x} dx \text{ care-i convergentă.}$$

Pentru calcul se descompune fracția

$$\frac{x^3+3x+3}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}.$$

Integrala $I=I_1+I_2+I_3$ unde $I_k=\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{(1+x)^k}\,dx$. Se integrează I_3 prin părți $u=e^{-x}\sin x$, $dv=\frac{dx}{(1+x)^3}$, rezultă :

$$I_3=\left|-\frac{e^{-x}\sin x}{(1+x)^2}\right|_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x-\sin x)}{(1+x)^2}\,dx.$$

Se deduce $I_2+I_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x+\sin x)}{(1+x)^2}\,dx$. O nouă integrare prin părți cu $u=e^{-x}(\cos x+\sin x)$, $dv=\frac{dx}{(1+x)^2}$, dă

$$I_2+I_3=\left|-\frac{e^{-x}(\cos x+\sin x)}{2(1+x)}\right|_0^\infty-I_1,\quad \text{de unde}\quad I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}.$$

424. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$, deci $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx$, de unde $2I=I-\frac{\pi}{2}\ln 2$, de unde $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

425. $$\int_0^\infty \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx+\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,dx=$$

$$=\left|\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3\right|_0^\infty=\frac{2\pi}{3}.$$

426. $\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}=\frac{Ax+B}{x^2-2x\cos\alpha+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x\cos\alpha+1}$, rezultă

$$B=D=0,\quad A=\frac{1}{4\cos\alpha},\quad C=-\frac{1}{4\cos\alpha}$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}=\frac{1}{4\cos\alpha}\left[\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}-\int\frac{xdx}{x^2+2x\cos\alpha+1}\right].$$

Dar $x^2-2x\cos\alpha+1=(x-\cos\alpha)^2+\beta^2$, cu schimbarea $x=\cos\alpha+t\sin\alpha$ se obține :

$$\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Schimbînd apoi $\cos x$ în $-\cos\alpha$, rezultă

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = -\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{arctg}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x\cos\alpha+1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1} = \frac{\pi}{2\sin\alpha}. \text{ Pentru } \alpha=\frac{\pi}{2} \text{ avem}$$

$$\int_{-+}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}; \text{ pentru } \alpha=\frac{\pi}{4}; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \text{ pentru } \alpha=\frac{\pi}{6};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1} = \pi, \text{ și pentru } \alpha=\frac{\pi}{3}; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

427. Schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ ne conduce la

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-4\cos x} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+9t^2} = \frac{\pi}{3}.$$

428. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, se obține $\frac{\pi}{6}$.

429. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x+2} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$ făcînd în ultima $x=2\pi-t$ se obține

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x+2}.$$

În ultima integrală se poate face $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, de unde

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

430. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. Schimbarea $\operatorname{tg} x=t$ ne conduce la

$$2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

431. $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} = 4\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x}$; dar $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x} =$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x}.$$

Se face în ultima $x = 2\pi - u$, de unde

$$I = 8\int_0^{\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x}, \text{ dar}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x}$$

în ultima facem $x = \pi - u$, de unde

$I = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 - \sin^2 2x} = 4\int_0^{\infty} \frac{(1 + t^2)\,dt}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ s-a făcut $\operatorname{tg} x = t$.

432. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} = \int_0^{\infty} \frac{(1 + t^2)}{(t^2 + 2)(t^2 + 3)}\,dt =$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right);\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

433. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ conduce la $2\int_0^{\infty} \frac{(1 + t^2)dt}{(9 + t^2)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 9} - 16\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 9)^2} = \frac{5\pi}{27}$.

434. $I = \int_0^{\pi} \frac{\cos 3x\,dx}{\cos x + 2} = \int_0^{\pi} \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x + 2}\,dx = 4\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\cos x + 2}\,dx - 3\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\cos x + 2}$.

Notînd cu A și B ultimele două integrale, $I = 4A - 3B$. Prin schimbarea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, A devine

$$A = 2\int_0^{\infty} \frac{(1 - t^2)^3}{(1 + t^2)^3(t^2 + 3)}\,dt = 8\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^3} - 16\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} + 14\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} -$$

$$- 16\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{9\pi}{2} - \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$$ (S-a aplicat formula din ex. 198.)

$B = 2\int_0^{\infty} \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)(t^2 + 3)}\,dt = \pi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ de unde $I = 4A - 3B = 15\pi - \frac{26\pi}{\sqrt{3}}$.

Scanned with OKEN Scanner

435. Integrăm de la 0 la l.

$$I(l) = \int_0 \operatorname{arcctg} x^2 dx = x \operatorname{arcctg} x^2 \Big|_0 + 2\int_0^l \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$ cînd $l \to \infty$ primul termen tinde către zero, iar a doua este convergentă cînd $l \to \infty$.

$$\int_0 \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{l^2 - l\sqrt{2}+1}{l^2 + l\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(l\sqrt{2}+1) +$$

$$+ \operatorname{arctg}(l\sqrt{2}-1)]. \text{ La limită } I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(Pentru calculul integralei vezi 135.)

CAPITOLUL IV

FUNCŢII EULERIENE

Integrala se poate scrie:

436. $$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} =$$

$$= \frac{1}{8}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}; \text{ căci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

437. Se face schimbarea $x = a\sqrt{u}$ şi integrala devine:

$$I = \frac{a^4}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}} du = \frac{\pi a^4}{16}.$$

438. Se face schimbarea $x = \frac{t}{1-t}$ şi rezultă:

$$I = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}} dt$$

deci:

$$I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}; \text{ dar } \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

rezultă:

$$I = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}; \quad I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

439. Schimbarea $x^4 = \frac{t}{1-t}$ conduce la:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

440. Schimbarea $x^4 = \frac{t}{1-t}$ conduce la:

$$\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

441. Schimbarea $x^3 = \frac{t}{1-t}$ conduce la:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

442. Schimbarea $x = \frac{t}{1-t}$ conduce la:

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt = B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

443. Schimbarea $x^3 = \frac{t}{1-t}$ conduce la:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right);\ I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

444. Schimbarea $x^2 = \frac{t}{1-t}$ conduce la

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{4}{3}}\,dt;\ I = \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma(3)};$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right);\ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},\ \text{aşadar},\ I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Scanned with OKEN Scanner

445. Se face schimbarea $x = \frac{t}{1-t}$; şi se obţine:

$$I = B\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right), \; I = \frac{10\pi}{9\sqrt{3}}.$$

446. Schimbarea $x^4 = \frac{t}{1-t}$; conduce la $I = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), I = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$.

447. Schimbarea $x^6 = \frac{t}{1-t}$ conduce la $I = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$I = \frac{1}{12} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{12}.$$

448. Integrala devine $I = \int_0^1 x^{\frac{7}{4}} (1-x)^{\frac{1}{4}} dx = B\left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

$$B\left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{7}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7\pi\sqrt{2}}{128}.$$

449. Se face schimbarea $\sin^2 x = t$; $x = \arcsin\sqrt{t}$; $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$ şi se obţine $I = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{32}$.

450. Schimbarea $\sin^2 x = t$ conduce la $I = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

se obţine $I = \frac{3\pi}{512}$.

451. Schimbarea $\sin x = \sqrt{t}$ conduce la

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt, \text{ deci } I = \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

452. Schimbarea $\sin\varphi = \sqrt{t}$ conduce la:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

453. Schimbarea $\sin\varphi = \sqrt{t}$ conduce la:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci :

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)};\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

aşadar :

$$I = \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2^n}\frac{\pi}{n!}$$

sau :

$$I = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}.$$

454. În formula :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

facem $m = 1 + p$; $n = 1 - p$, unde $|p| < 1$, formula de mai sus devine :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \text{ dar}$$

$$\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{(1+p)\pi}{2}},$$

deci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

455. În integrala propusă se face schimbarea $x^2 = t$ şi se obţine

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

dar

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \text{ deci}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

456. Se presupune că $m-1$ și n îndeplinesc condiția pentru ca integrala să aibă sens. Se face schimbarea $x^n = \frac{t}{1-t}$ și se obține:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}(1-t)^{-\frac{m}{n}}dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)$$

deci $I = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}$, va trebui ca $\frac{m}{n} < 1$, deci $0 < m < n$.

457. Schimbarea de variabilă $t = \frac{x-a}{b-x}$ conduce la

$$I(m, n) = (b-a)^{m+n+1}\int_0^\infty \frac{t^m dt}{(1+t)^{m+n+2}},$$

în această integrală se face schimbarea $t = \frac{u}{1-u}$, care conduce la

$$I(m, n) = (b-a)^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n du = (b-a)^{m+n+1}B(m+1, n+1),$$

deci $I(m, n) = (b-a)^{m+n+1}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$ dacă $m, n \in N$

avem $I(m, n) = (b-a)^{m+n+1}\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ altfel: se face schimbarea de variabilă $x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$ etc.

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (b-a)^2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2!}$$

deci $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (b-a)^2\frac{\pi}{8}$;

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^b (x-a)^{-\frac{1}{2}}(b-x)^{-\frac{1}{2}}dx = I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Rezultă:

$$I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

458. Se face transformarea omografică $x = \frac{mt+n}{m't+n'}$, $mn' - m'n \neq 0$, și se caută în primul rînd în ce condiții variabila t va avea ca interval de variație $(0, 1)$.

Dacă pentru $t = 0$, trebuie să avem $x = 0$, vom lua $n = 0$; pentru $t = 1$ va trebui să avem $x = 1$ deci $m' + n' = m$ sau luînd $m' = -1$; $n' = m + 1$ (dacă m' ar fi nul, atunci $x = t$), substituția omografică are

forma $x = \frac{mt}{m+1-t} = \frac{mt}{D}$. Putem dispune de coeficientul m; avem $x+\alpha = \frac{(m-\alpha)t + (m+1)\alpha}{D}$ vom alege pe m în așa fel ca să dispară termenul în t de la numărătorul lui $x+\alpha$; $m = \alpha$; așadar

$$x = \frac{\alpha t}{\alpha + 1 - t} = \frac{\alpha t}{D};\quad 1 - x = \frac{(1+\alpha)(1-t)}{D}$$

$$x + \alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{D};\quad \frac{dx}{x+\alpha} = \frac{dt}{D}.$$ Integrala I se mai scrie sub forma

$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x(x+\alpha)}$ $(0 < p < 1)$ se face schimbarea de mai sus și se obține:

$$I = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}dt;\ \text{deci:}$$

$$I = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p B(p,\ 1-p) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

459. $\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x} = \frac{x(1-x)}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}}$ dar $\frac{x(1-x)}{x+1} = 2 - x - \frac{2}{x+1}$

deci $\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1} = \left(2 - x - \frac{2}{x+1}\right)\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, așadar

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} - 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}},\ \text{deci}$$

$$I = 2\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}}.$$

Așadar

$$I = 2B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) - 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}}.$$

Pentru calculul $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}}$ se aplică cele stabilite în problema precedentă și se obține $x = \frac{t}{2-t}$. Rezultă:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Așadar

$$I = 2B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\,B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

deci

$$I = \pi\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

460. Se aplică rezultatul de la problema 458 și se obține transformarea $x = \frac{t}{2-t}$ $dx = \frac{2dt}{(2-t)^2}$.

Integrala devine $I = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} B\left(\frac{1}{3}\frac{2}{3}\right)$

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}.$$

461. Se aplică transformarea $x = \frac{\alpha t}{\alpha + 1 - t}$; $\alpha = 3$, deci $x = \frac{3t}{4-t}$;

$dx = \frac{12\ dt}{(4-t)^2}$, se obține

$$I = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} B\left(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt[4]{27}}.$$

462. Transformarea $x = \frac{t}{2-t}$ conduce la

$$I = \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \int_0^1 t^{\frac{2}{3}} (1-t)^{\frac{1}{3}}\ dt = \frac{\sqrt[3]{2}}{4} B\left(\frac{5}{3}\ \frac{4}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{18\sqrt{3}}.$$

463. Avem $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{1}{2x}\left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$. Deci

$$2I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\,(x^2+1)} - \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\,(x+1)^2}.$$

Se notează:

$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}(x^2+1)}$ și $I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}(x+1)^2}$, pentru prima se face schimbarea $x^2 = \frac{t}{1-t}$ care ne conduce la $I_1 = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$, deci $I_1 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{10}}$. Pentru a doua se face schimbarea $x = \frac{u}{1-u}$ care conduce la $I_2 = B\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{\Gamma(2)}$, deci $I_2 = \frac{4\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$; așadar,

$$I = \left(\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{10}} - \frac{2}{5\sin\frac{\pi}{5}}\right)\pi.$$

464. Se presupune n par, atunci rezultă:

$$I = \int_{-1}^0 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx + \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int_0^1 x^n \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx.$$

$I = 2\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ schimbarea $x = \sqrt{u}$, conduce la $I = \int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du =$

$= B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Analog se tratează și cazul cînd n este impar.

465. 1) $I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$, se face schimbarea $x = 1 - t$ și se obține $I = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)dt$, dar 2) $I = \int_0^1 \ln(1-x)dx$, adunînd 1) și 2) se obține $2I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)dx$, dar $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, $x < 1$, deci $2I = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x\, dx$; în $\int_0^1 \ln \sin \pi x \cdot dx$ se face schimbarea $\pi x = t$ și se obține: $\int_0^1 \ln \sin \pi x \cdot dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln \sin t\, dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t\, dt\right)$; în integrala $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t\, dt$ se face schimbarea $t = \pi - u$, deci $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u\, du$, așadar $\int_0^1 \ln \sin \pi x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx$, deci $\int_0^1 \ln \sin \pi x\, dx = -\ln 2$; rezultă $2I = \ln \pi + \ln 2 = \ln 2\pi$, deci $I = \ln \cdot \sqrt{2\pi}$.

466. Pentru $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ curba prezintă o buclă. Avem $A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2}\theta \cdot \cos^{1/2}\theta d\theta$.

Schimbarea $\sin \theta = \sqrt{t}$ conduce la $A = \frac{a^2}{2} B\left(\frac{5}{4}\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{16}$.

467. Se întrebuințează coordonate polare generalizate

$x = a\rho \cos\theta$; $y = b\rho \sin\theta$ și se obține:

$\rho = \frac{1}{hk}\sqrt{\frac{a^2k^2\cos^2\theta + b^2h^2\sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}$, curba are puncte la distanță finită și este simetrică față de origine, cum $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$, se obține

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{hk}\sqrt{\frac{a^2k^2\cos^2\theta + b^2h^2\sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}} \rho d\rho$$

$$A = \frac{2a^3b}{h^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} + \frac{2ab^3}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$ (se face în a doua schimbare de variabilă $\theta = \frac{\pi}{2} - t$)

Aşadar $A = \left(\frac{2a^3b}{h^3} + \frac{2ab^3}{k^3}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$, schimbarea $\operatorname{tg}\theta = t$ conduce la $A = \left(\frac{2a^3b}{h^3} + \frac{2ab^3}{k^3}\right) \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$, integrala se reduce la $\frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ prin schimbarea $t^4 = \frac{u}{1-u}$ (vezi exerciţiul nr. 439).

Aşadar

$$A = \frac{\pi ab}{\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

468. Se trece la coordonate polare generalizate $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$ şi se obţine curba $\rho = \frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{(\cos\theta + \sin\theta)^3}$ pentru $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, curba prezintă o buclă.

Avem:

$$x_G = \frac{a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}} \rho^2 d\rho}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}} \rho\, d\rho}$$

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}} \rho^2 d\rho = \frac{a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos^2\theta\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{(\sin\theta+\cos\theta)^6} d\theta.$$

Prin schimbarea $\operatorname{tg}\theta = t$, integrala precedentă devine $\frac{a}{3}\int_0^{\infty} \frac{t\sqrt{t}\,dt}{(t+1)^6}$ schimbarea $t = \frac{u}{1-u}$ conduce la

$$\frac{a}{3}\int_0^{\infty} \frac{t\sqrt{t}}{(t+1)^6} dt = \frac{a}{3} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{a}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{\pi a}{256}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^4} = \frac{1}{12}$$

(se face $\operatorname{tg}\theta = t$). Aşadar $x_G = \frac{3a\pi}{64}$. Analog $y_G = \frac{3b\pi}{64}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

FUNCȚII DEFINITE PRINTR-O INTEGRALĂ

469. Funcția $f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)$ este definită pe dreptunghiul $\mathbf{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, este continuă admițînd o derivată parțială continuă în raport cu m. $I(m)$ este deci de clasă C'. Așadar:

$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}$, se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ și se obține integrala convergentă

$$I'(m) = 2m \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)}; \text{ rezultă } I'(m) = \frac{\pi}{m+1}.$$

Așadar $I(m) = \pi \ln(m+1) + C$; dar cum $I(1) = 0$ se obține $C = -\pi \ln 2$, deci $I(m) = \pi \ln \frac{m+1}{2}$.

470. Funcția $f(x, a) = \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$ este definită pe dreptunghiul $]-1, 1[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; este continuă admițînd o derivată parțială continuă în raport cu a, deci $I(a)$ este de clasă C^1. Așadar $I'(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a^2 \sin^2 x}$ se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ și rezultă $I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ deci $I(a) = \pi \arcsin a + C$ dar $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$; deci $I(a) = \pi \arcsin a$.

471. Funcția $f(x, a) = \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x}$ este definită pe dreptunghiul $]-1, 1[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, este continuă admițînd o derivată parțială continuă în raport cu a; deci $I(a)$ este de clasă C^1. Așadar $I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a \cos x}$, se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și rezultă: $I'(a) = \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$.

Așadar $I(a) = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\, da + G$ se face schimbarea $a = \cos u$ și rezultă:

$I(a) = -\frac{u^2}{2} + C$ sau $I(a) = -\frac{(\arccos a)^2}{2} + C$ dar cum $I(0) = 0$, rezultă $C = \frac{\pi^2}{8}$ așadar $I(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos a)^2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

472. $I(a)$ este de clasă C^1, rezultă $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,dx}{a^2-\sin^2 x}$ se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ și se obține

$$I'(a) = \frac{2a}{a^2-1}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{a^2}{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \text{ deci } I(a) = \pi \ln(a+\sqrt{a^2-1}) + C,$$

de unde

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2 x)dx - \pi \ln(a+\sqrt{a^2+1})$$

sau

$$C = \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right) dx - \pi \ln(a+\sqrt{a^2+1})$$

dar $\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)\right| < \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$; deci $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)dx\right| \leqslant$

$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)dx \text{ ; când } a \to \infty \text{ ; } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right) dx \to 0.$$

Rezultă $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right) dx - \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}$ când $a \to \infty$; $C = -\pi \ln 2$,

$$\text{așadar } I(a) = \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}.$$

473. $I(a)$ este de clasă C^1, rezultă:

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} \text{ ; } I'(a) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C \text{ cum } I(0) = 0 \text{ ; } C = 0 \text{ și deci}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$$

474. $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$.

475. $I(x)$ este de clasă C^1. Se obține $I'(x) = -\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\,dt}{1-a\cos t}$.

Dar $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\,dt}{1-x\cos t} = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos t\,dt}{1-x\cos t}$. Așadar $I'(x) = -2\int_0^{\pi} \frac{\cos t\,dt}{1-x\cos t}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se face schimbarea $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = v$ şi se obţine :

$$I'(x) = -4\int_0^{\infty} \frac{(1-v^2)dv}{(1+v^2)[(1+x)v^2+1-x]}.$$

Aşadar $I'(x) = \frac{2\pi}{x} - \frac{2\pi}{x\sqrt{1-x^2}}$, de unde :

$$I(x) = 2\pi\int\frac{dx}{x} - 2\pi\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + C$$

$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ se face schimbarea $x = \sin\varphi$.

Aşadar $I(x) = 2\pi\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C$,

dar $I(0) = 0$ deci $0 = 2\pi\ln 2 + C$, rezultă $I(x) = 2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$.

476. Funcţia $f(x, a) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}$ este definită şi continuă pe dreptunghiul $R_+ \times [0, a]$, admiţînd o derivată parţială continuă în raport cu a, $I(a)$ este deci de clasă C^1, pentru $a \in \mathbf{R}_+$.

Aşadar $I'(a) = \int_0^a \frac{xdx}{(1+ax)(1+x^2)} + \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}$.

Calculînd integrala se obţine :

$$I'(a) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} + \frac{a\operatorname{arc\,tg} a}{1+a^2} \text{ de unde}$$

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}da + \int_0^a \frac{a\operatorname{arc\,tg} a}{1+a^2}da.$$

Calculînd a doua integrală prin părţi rezultă :

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}da + \frac{1}{2}\ln(1+a^2)\operatorname{arctg} a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}da.$$

Deci $I(a) = \frac{1}{2}\ln(1+a^2)\operatorname{arc\,tg} a$. Pentru $a = 1$ se obţine integrala

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

477. Se obţine $I(a, b) = \frac{\pi}{ab}\cdot J(a, b)$ fiind de clasă C^1 rezultă :

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -2a\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}; \quad \frac{\partial I}{\partial b} = -2b\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} \text{ se deduce :}$$

$$I(a, b) = -\frac{1}{2a}\frac{\partial I}{\partial a} - \frac{1}{2b}\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{\pi}{2ab}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

478. Se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, se obține

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t+\lambda)}$$

$$F(t) = \int \frac{dt}{(t^2+1)(t+\lambda)} = \frac{1}{\lambda^2+1}\left[\lambda \operatorname{arctg} t + \ln \frac{t+\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\right].$$

Rezultă

$$f(\lambda) = F(+\infty) - F(0) = \frac{1}{\lambda^2+1}\left(\pi\frac{\lambda}{2} - \ln\lambda\right)$$

cum $f(\lambda)$ este de clasă C^1, rezultă:

$$f'(\lambda) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + \lambda)^2} = -I$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)} - \frac{2\lambda\ln\lambda}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Prin calcul direct se obține

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t+\lambda)^2}.$$

$$G(t) = \int \frac{dt}{(t^2+1)(t+\lambda)^2} = \frac{1}{(\lambda^2+1)^2}\left[2\lambda \ln \frac{t+\lambda}{\sqrt{t^2+1}} + (\lambda^2-1)\operatorname{arctg} t\right] -$$

$$- \frac{1}{(\lambda^2+1)(\lambda+t)}$$

deci

$$I = G(+\infty) - G(0) = \frac{\pi}{2}\frac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)^2} + \frac{1}{\lambda(\lambda^2+1)} - \frac{2\lambda\ln\lambda}{(\lambda^2+1)^2}.$$

479. Pentru $x > 0$ în sensul strict; $J(x)$ este de clasă C^n. Aşadar:

$$J'(x) = -\int_0^a \frac{dt}{(x+t^2)^2} \quad \ldots J^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \int_0^a \frac{dt}{(x+t^2)^n}$$ se deduce

pentru $x = 1$; $I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} J^{(n-1)}(1)$. Calculul direct al lui $J(x)$ ne conduce la:

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{x}}.$$

Pentru a obține I_n se derivează de $(n-1)$ ori această expresie şi se face $x = 1$.

De exemplu:

$$J'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x+a^2}\right), \text{ pentru } x = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} a + \frac{1}{a^2+1}\right).$$

480. Cele două funcții $f(x)$ și $g(x)$ sînt definite și continue pentru orice valoare a lui x. Fiind și derivabile sînt de clasă C^1; rezultă:

$$f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$\text{și } g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

făcînd schimbarea de variabilă $tx = u$ în ultima integrală se obține:

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -f'(x)$$

se deduce $f'(x) + g'(x) = 0$, așadar $f(x) + g(x) = C$ pentru $x = 0$, $g(0) = \frac{\pi}{4}$ deci $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$. Cînd $x \to \infty$ funcția $e^{-x^2(1+t^2)} \to 0$ uniform pentru $t \in [0, 1]$. Într-adevăr pentru $\forall \varepsilon > 0$, este posibil de a asocia $X > 0$ în așa fel ca pentru $x > X$, să avem $\left|e^{-x^2(1+t^2)}\right| < \varepsilon$, $\forall t \in [0, 1]$. Avem atunci

$$g(x) < \varepsilon\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \text{ prin urmare } \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

481. f este evident definită pentru $x > 0$. Se consideră

$$g(u, v, x) = \int_u^v \cos(x+t)\ln xt\,dt$$

g admite, pentru u, v, x pozitivi, derivate parțiale continue

$$g'_u(u, v, x.) = -\cos(x+u)\ln xu$$
$$g'_v(u, v, x) = \cos(x+v)\ln xv$$

$$g'_x(u, v, x) = \int_u^v \left[-\sin(x+t)\ln(xt) + \frac{\cos(x+t)}{x}\right]dt$$

aceasta din urmă fiind definită și continuă, căci

$$(t, x) \to -\sin(x+t)\ln(x, t) + \frac{\cos(x+t)}{x}$$

este ea însăși continuă în orice punct al mulțimii $[u, v] \times \{x\}$, f apare atunci ca o funcție compusă, ea însăși derivabilă:

$$f'(x) = g'_u(x, 2x, x)1 + g'_v(x, 2x, x)2 + g'_x(x, 2x, x)$$

$$= -\cos 2x\ln(x^2) + 2\cos 3x\ln 2x^2 + \int_x^{2x}\left[\frac{\cos(x+t)}{x} - \sin(x+t)\ln tx\right]dt$$

Scanned with OKEN Scanner

Se putea calcula derivata observînd că:

$$f(x) = \ln x \cdot \cos x \int_x^{2x} \cos t\, dt - \ln x \sin x \int_x^{2x} \sin t\, dt + \cos x \int_x^{2x} \cos t \ln t\, dt -$$

$$- \sin x \int_x^{2x} \sin t \cdot \ln t\, dt.$$

482. Funcţia f este evident definită pentru $x \geqslant 0$. Se consideră pentru $x \in \mathbf{N}$, funcţia: $f_n : x \to \int_0^n \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt$. Funcţia $(x, t) \to \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}$ fiind continuă în orice punct al mulţimii $\mathbf{R}_+ \times [a, n]$, f_n este continuă pe $\mathbf{R}_+$; în afară de aceasta $\forall x \in \mathbf{R}_+$:

$$|f(x) - f_n(x)| = \int_n^\infty \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt < \int_n^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

ţinînd seamă de relaţia $\operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$. Se deduce convergenţa uniformă a funcţiei f_n către funcţia f pe $\mathbf{R}_+$, f este continuă pe $\mathbf{R}_+$ ca şi f_n.

Funcţia $(x, t) \to \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}$ este ea însăşi continuă pe $\mathbf{R}_+ \times [0, n]$ rezultă atunci $(\forall x \in \mathbf{R}_+)$: $f_n'(x) = \int_0^n \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt$.

Integrala $\int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt$ nu este definită decît pentru $x > 0$; să considerăm mai precis $a > 0$,

$$(\forall x \geqslant a) \left| \int_n^\infty \frac{-t^2 e^{-t^2 x}\, dt}{1+t^2} \right| < \int_n^\infty \frac{t^2 e^{-t^2 a}}{1+t^2}\, dt.$$

Integrala majorantă are o limită nulă pentru $n \to \infty$, rezultă convergenţa uniformă a lui f_n către funcţia $x \to \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt$ pe mulţimea $[a, +\infty[$; f este deci derivabilă pe $[a, +\infty[$, adică pe $\mathbf{R}_+^*$, cu $(\forall x > 0)$, $f'(x) = \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt$; f' este continuă pe $\mathbf{R}_+^*$.

483. 1) Se obţine imediat: ,$x > 0$, $I(x) = \frac{\pi}{2}$; $x = 0$, $I(0) = 0$; $x < 0$; $I(x) = -\frac{\pi}{2}$. Funcţia $I(x)$ este deci discontinuă în $x = 0$. Funcţia integrată fiind continuă, convergenţa nu poate fi uniformă. Să studiem pentru T dat

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| I(x) - \int_0^T \frac{x\, dt}{1 + x^2 t^2} \right| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| I(x) - \operatorname{arctg} Tx \right|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd $x = 0$, mărimea studiată este nulă. Cînd $x \to 0$ (dar $x \neq 0$), ea tinde pentru orice valoare dată a lui T, către $\frac{\pi}{2}$. Marginea superioară fiind egală cu $\frac{\pi}{2}$, convergența nu poate fi uniformă.

2) Se obține pentru un x oarecare $J(x) = \frac{\pi}{2} |x|$. Funcția este continuă. Să stabilim convergența uniformă. Avem

$$\int_T^\infty \frac{x^2 dt}{1 + x^2 t^2} < \int_T^\infty \frac{x^2 dt}{x^2 t^2} = \frac{1}{T}.$$

Alegînd $T_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, se realizează, pentru $\forall T$ verificînd $T > T_0$ și pentru $\forall x$,

$$\left| \int_T^\infty \frac{x^2 dt}{1 + x^2 t^2} \right| < \varepsilon.$$

Convergența este uniformă. Funcția integrată fiind continuă în origine ($x = 0, t = 0$), funcția $I(x)$ este continuă în $x = 0$.
Se va observa că ea nu este derivabilă.

484. Integrala este convergentă. Funcția $f(x, a) = \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$; $a^2 < 1$ este definită și continuă pe mulțimea $]-1, 1[\times [0, 1[$, admițînd o derivată parțială continuă în raport cu a. $I(a)$ este deci de clasă C^1. Așadar:

$I'(a) = -2a \int_0^1 \frac{dx}{(1 - a^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}$, se face schimbarea $x = \sin t$ și se obține

$I'(a) = -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a^2 \sin^2 t}$, se face schimbarea $\operatorname{tg} t = u$ și se obține:

$$I'(a) = -2a \int_0^\infty \frac{du}{u^2(1 - a^2) + 1}, \text{ de unde } I'(a) = \frac{-2a\pi}{2\sqrt{1 - a^2}},$$

deci $I(a) = \pi\sqrt{1 - a^2} + C$, dar cum $I(0) = 0$, rezultă $C = -\pi$. Așadar $I(a) = \pi\left(\sqrt{1 - a^2} - 1\right)$.

485. Integrala este convergentă. $I(a)$ este de clasă C^1 așadar

$I'(a) = -\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - ax^2)\sqrt{1 - x^2}}$, făcînd schimbarea $x = \sin t$ se obține:

$I'(a) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\, dt}{1 - a \sin^2 t}$, se face schimbarea $\operatorname{tg} t = u$ și rezultă:

$I'(a) = -\int_0^\infty \frac{u^2 du}{(1 + u^2)[1 + (1 - a)u^2]}$, avem: $\frac{u^2}{(1 + u^2)[1 + (1 - a)u^2]} = -\frac{1}{a(1 + u^2)} +$

$\frac{1}{a[1+(1-a)u^2]}$. Aşadar: $I'(a)=\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{du}{1+(1+a)u^2}$ sau

$$I'(a)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{a}-\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{a\sqrt{1-a}}+C$, dar cum $\int\frac{da}{a\sqrt{1-a}}=\ln a-2\ln(1+\sqrt{1-a})$ rezultă $I(a)=\pi\ln(1+\sqrt{1-a})+C$ dar $I(0)=0$,

deci $C=-\pi\ln 2$; $I(a)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a}}{2}$.

486. 1) Se consideră integrala $I(a)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $a>0$ $I(a)$ este convergentă; $(x,\ a)\to\frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}$ este definită şi continuă pe mulţimea $]0,\ \infty[\times[0,\ 1[$ şi admite o derivată parţială continuă în raport cu a, aşadar $I(a)$ este de clasă C^1. Se obţine:

$I'(a)=\int_0^1\frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$, făcînd schimbarea $x=\sin t$ rezultă:

$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+a^2\sin^2 t}$; schimbarea $\operatorname{tg} t=u$ conduce la $I'(a)=\int_0^\infty\frac{du}{(1+a^2)u^2+1}=$

$=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Deci $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})+C$ cum $I(0)=0$, rezultă $C=0$, aşadar $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ pentru $a=1$ se obţine

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

2) $I=\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; dar $\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\int_0^1\frac{dt}{x^2t^2+1}$.

Înlocuind sub integrală pe $\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ cu expresia sa integrală, vom scrie pe I sub formă de integrală iterată

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dt}{x^2t^2+1}$$

cum funcţia $(x,\ a)\to\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}$ este continuă în raport cu ambele variabile pe mulţimea $]0,\ \infty[\times[0,\ 1[$, integralele se pot permuta, aşadar

$$I=\int_0^1 dt\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

487. Funcţia de sub semnul integral poate fi scrisă sub forma unei integrale $\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1\frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2x}$. Aşadar

$$I(a,\ b)=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2x}$$

condiţia fiind îndeplinită se pot permuta integralele deci

$$I(a,\ b)=2ab\int_0^1 dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2-b^2t^2\sin^2x};\ \text{dar}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2-b^2t^2\sin^2x}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-b^2t^2}}.$$

Rezultă :

$$I(a,\ b)=\pi b\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{a^2-b^2t^2}}=\pi\arcsin\frac{b}{a}.$$

488. a) În acest caz $a=0,\ b=n;\ \alpha=0;\ \beta=A$

şi $$f(x,\ t)=\begin{cases}\frac{e^{-tx}\sin t}{t} & \text{dacă } (x,\ t)\in[0,\ A]\times]0,\ n[\\ 1 & \text{dacă } (x,\ t)\in[0,\ A]\times\{0\}.\end{cases}$$

Rezultă $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=-e^{-tx}\sin t$ care este continuă pe $[0,\ A]\times]0,\ n[$ deci $F_n(x)=\int_0^n f(x,\ t)dt$ este de clasă C^1 pe $[0,\ A]$ şi avem $F_n'(x)=\int_0^n\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt=$

$=-\int_0^n e^{-tx}\sin t\,dt$ A fiind o constantă arbitrară >0, se poate afirma că F_n este de clasă C^1 pe $[\alpha,\ +\infty[$.

b) utilizînd integrarea prin părţi rezultă :

$$\int_0^n e^{-tx}\sin t\,dt=[-e^{-tx}\cos t]_0^n-x\int_0^n e^{-tx}\cos t\,dt$$

deci

$$(1+x^2)\int_0^n e^{-tx}\sin t\,dt=[-e^{-tx}\cos t]_0^n-x[e^{-tx}\sin t]_0^n.$$

Aşadar

$$\int_0^n e^{-tx}\sin t\,dt=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\cos n+x\sin n}{1+x^2}e^{-nx}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De unde :

$$F_n'(x) = -\int_0^n e^{-tx}\sin t\, dt = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{\cos n + x \sin n}{1+x^2} e^{-nx}$$

deci $$\left|F_n'(x) + \frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant e^{-nx}\frac{1+x}{1+x^2} \leqslant 2e^{-n\alpha}$$

funcţia e^{-nx} este descrescătoare, deci dacă $\alpha > 0$, $\forall x \in [\alpha, +\infty[$;

$$\left|F_n'(x) + \frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 2e^{-n\alpha}.$$

Prin urmare $$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\,;\ \exists N(\varepsilon) \text{ astfel ca} \\ n \geqslant N(\varepsilon) \rightarrow \left|F_n'(x) - \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\right| \leqslant \varepsilon;\ \forall x \in [\alpha, +\infty[. \end{cases}$$

(Se alege $N(\varepsilon)$ astfel ca $2e^{-n\alpha} \leqslant \varepsilon$)

c) fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcţie pozitivă şi descrescătoare
şi $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe $[a, b]$
avem atunci teorema a doua a mediei

$$\int_a^b f(t)\, g(t)dt = f(a) \int_a^\xi g(t)\, dt$$

se notează $a = n$; $b = m$; $m > n$; $f(t) = \frac{e^{-tx}}{t}$; $g(t) = \sin t$.

Rezultă :

$$\int_n^m \frac{e^{-tx}\sin t}{t}\, dt = \frac{e^{-nt}}{n}\int_n^\xi \sin t\, dt = \frac{e^{-nt}}{n}(\cos n - \cos \xi)$$

deci $$\left|\int_n^m \frac{e^{-tx}\sin t}{t}\, dt\right| \leqslant \frac{e^{-nt}}{n}(|\cos n| + |\cos \xi|) \leqslant \frac{2e^{-nt}}{n}$$

unde $m > n$. Aşadar :

$$\left|F_m(x) - F_n(x)\right| \leqslant \left|\int_n^m \frac{e^{-tx}\sin t}{t}\, dt\right| \leqslant 2\frac{e^{-nt}}{n} \leqslant \frac{2}{n}$$

$\forall x \in [0, \infty[$, aceasta are drept consecinţă convergenţa uniformă a lui $F_n(x)$ către funcţia sa limită $\Phi(x)$ pe $[0, \infty[$. În rezumat :

F_n este continuă (căci este de clasă C^1) pe $[0, \infty[$
F_n converge uniform către Φ pe $[0, \infty[$

deci $\Phi(x)$ este continuă pe $[0, \infty[$.

În particular $\Phi(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ $\Phi(0)$ este considerată ca fiind limita integralei $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ cînd $X \rightarrow \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

d) $F_n(x)$ converge simplu către $\Phi(x)$ pe $[0, \infty[$ deci cu atît mai mult pe $[\alpha, \infty[$.

$F_n'(x)$ este continuă pe $[\alpha, \infty[$, pentru că $F_n(x)$ este de clasă C^1.

$F_n'(x)$ converge uniform către $-\frac{1}{1+x^2}$ pe $[\alpha, +\infty[$ deci $\Phi(x)$ este de clasă C^1 pe $[\alpha, \infty[$ și avem:

$\Phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$; $\forall x \in [\alpha, +\infty[$ (α constanta > 0) α fiind ales arbitrar, se deduce că Φ este de clasă C^1 în $]0, \infty[$ și $\Phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$; $\forall x > 0$.

Rezultă $\Phi(x) = -\operatorname{arc\,tg} x + K$; $\forall x > 0$ și (K: constantă). Dar se poate arăta că dacă $x \to \infty$; $\Phi(x) \to 0$, avem:

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1, \quad \forall t \in]0, \infty[\text{ deci}$$

$$\Phi(x) = \left|\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-tx}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \leqslant \int_0^\infty e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$$

rezultă: $\Phi(x) \to 0$ cînd $x \to \infty$; așadar $0 = -\frac{\pi}{2} + K$ de unde $K = \frac{\pi}{2}$. Deci $\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall x > 0$.

e) Făcînd pe x să tindă către zero prin valori pozitive în formula $\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ și ținînd seamă de faptul că

$$\Phi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ se obține:}$$

$$\Phi(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \text{ deci } \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

489. 1) Se notează $f(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$, în vecinătatea infinitului, dacă $x < 0$, avem $e^{-t} < 1$ și $|f(x, t)| > \frac{e^{|tx|} - 1}{|t|}$, $f(x, t)$ crește la infinit cu t. Integrala este divergentă. Dacă $x = 0$, $f(x, t) = \frac{e^{-t} - 1}{t} = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t}$. Inegalitatea $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt < \int_1^\infty e^{-t}dt$, arată că prima integrală este convergentă, cum $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ este divergentă, $\int_0^\infty f(x, t)dt$ este divergentă.

Dacă $x > 0$, integrala este în vecinătatea infinitului (de exemplu pentru $t > 1$) diferența a două integrale $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ și $\int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\,dt$ care sînt convergente deci

$\int_1^\infty \frac{e^{-t}-e^{-tx}}{t}\,dt$ este convergentă. În vecinătatea originei avem: $f(x,\ t) = \frac{1-t-1+tx+\varepsilon t}{t} = x-1+\varepsilon$ unde ε este o funcție de t, care tinde către 0 cu t, funcția $f(x,\ t)$ este deci continuă în origine. Nu există deci problemă de convergență. Așadar integrala $I(x)$ există pentru $x > 0$.

2) Continuitatea lui $I(x)$. În planul x, t, $f(x,\ t)$ este o funcție continuă pentru $t \geqslant 0$ și $x \geqslant 0$. Integrala $\int_0^\infty f(x,\ t)\,dt$ este uniform convergentă în raport cu x pentru $x > x_0$ unde x_0 este un număr pozitiv dat (esențial diferit de zero). Într-adevăr pentru $x \geqslant x_0 > 0$, $\frac{e^{-tx}}{t} < \frac{e^{-tx_0}}{t}$ și integrala $\int_0^\infty \frac{e^{-tx_0}}{t}\,dt$ este convergentă și independentă de x. Deci $I(x)$ este continuă pentru $x > 0$.

3) Derivabilitatea. Derivata parțială $\frac{\partial f(x,\ t)}{\partial x} = e^{-tx}$ este o funcție continuă de t și de x în planul x, t. Integrala $J(x) = \int_0^\infty e^{-tx}dt$ există și converge uniform în raport cu x în orice interval $[x_0,\ x_1]$, $0 < x_0 < x_1$ căci în acest interval o majorantă a lui $J(x)$ este $\int_0^\infty e^{-tx_0}dt = \left[-\frac{1}{x_0}e^{-tx_0}\right]_0^\infty = \frac{1}{x_0}\int_0^\infty f(x,\ t)\,dt$ există pentru $x = 1$ căci $I(1) = 0$.

Deci $J(x) = I'(x)$ pentru $x > 0$. Așadar $I(x)$ este de clasă C^1.

4) Avem $I'(x) = \int_0^\infty e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$, deci $I(x) = \ln x + C$ unde C este o constantă. Cum $I(1) = 0$ se deduce $C = 0$. Așadar $I(x) = \ln x$, $\forall x > 0$.

490. a) Integralele $I(x)$ și $J(x)$ admit respectiv integralele $\int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)}$ și $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ ca majorante convergente deci $I(x)$ și $J(x)$ sînt absolut și uniform convergente în raport cu x în orice interval închis al axei reale.

b) Se aplică a doua teoremă a mediei; funcția $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$ este pozitivă și descrescătoare în intervalul $[1,\ \infty[$, funcția $\sin tx$ este integrabilă. Pentru $x \geqslant x_0$ și pentru p destul de mare avem:

$$\int_p^q \frac{t}{1+t^2}\sin xt\,dt = \frac{p}{1+p^2}\int_p^\xi \sin xt\,dt = \frac{p}{(1+p^2)x}\int_{px}^{\xi x}\sin u\,du$$

(ξ este cuprins între p și q). De unde:

$$\left|\int_p^q \frac{t}{1+t^2}\sin xt\,dt\right| \leqslant \frac{2p}{(1+p^2)x} \leqslant \frac{2p}{(1+p^2)x_0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se presupune $q > p$. Se poate alege p astfel ca $\frac{2p}{(1+p^2)x_0} < \varepsilon$. Atunci $\left|\int_p^q \frac{t}{1+t^2}\sin xt\,dt\right| < \varepsilon$, rezultă că integrala $K(x) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\sin xt\,dt$ este convergentă p fiind fixat se poate face $q \to \infty$ și se obține $\left|\int_p^\infty \frac{t}{1+t^2}\sin xt\,dt\right| \leqslant$ $\leqslant \frac{2p}{(1+p^2)x_0}$, restul integralei fiind majorat de o funcție de p, independentă de x și care tinde către zero cînd $p \to \infty$.

Prin definiție această integrală este uniform convergentă în orice interval astfel ca $x \geqslant x_0 > 0$.

c) Integralele $I(x)$, $J(x)$ și $K(x)$ fiind uniform convergente ele sînt de clasă C^1. prin urmare dacă $x > 0$, avem:

$$\frac{dI}{dx} = J\,;\ \frac{dJ}{dx} = -K = \frac{d^2I}{dx^2}.$$

Dar :

$$I(x) + K(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,dt = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ pentru } x > 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$$

Așadar pentru $x > 0$

$$I - I'' = \frac{\pi}{2}.$$

Integrală generală a acestei ecuații diferențiale este

$$I = \frac{\pi}{2} + Ae^x + Be^{-x}$$

unde A și B sînt două constante. Avem

$$J(x) = Ae^x - Be^{-x}$$

Dar cum $|J(x)| < \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$; $J(x)$ rămîne mărginită și

$$A = 0\,;\ \text{Cum } J(0) = \frac{\pi}{2} \text{ avem } B = -\frac{\pi}{2},$$

de unde $J(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ pentru $x > 0$; dar cum $J(x)$ este o funcție pară, avem $J(x) = \frac{\pi}{2}e^x$ pentru $x < 0$. Pentru $x = 0$; $J(0) = \frac{\pi}{2}$, se știe dinainte că $J(x)$ este continuă.

În rezumat :

$$J(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem :

$$K(x) = -\frac{dJ}{dx} = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \text{dacă } x > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \text{dacă } x < 0.$$

$K(x)$ este bineînțeles o funcție impară.

$K(x)$ este discontinuă în origine. Este deci normal ca integrala care o reprezintă să nu fie uniform convergentă într-un interval care conține originea.

În sfîrșit :

$$I(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}) \quad \text{dacă } x > 0$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1 + e^{x}) \quad \text{dacă } x < 0.$$

491. Numărul I este definit printr-o integrală dublă :

$$I = \int_0^\infty dt \int_1^2 e^{-tx}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt$$

$\int_0^\infty e^{-tx}dt$ fiind uniform convergentă, pentru $x \in [1, 2]$ se poate inversa ordinea integralelor de mai sus și rezultă :

$$I = \int_1^2 dx \int_0^\infty e^{-xt}dt = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Așadar :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt = \ln 2.$$

492. 1) Aplicînd integrarea prin părți se obține :

$$\int e^{-tu} \sin u\,du = -\frac{\cos u + t \sin u}{1 + t^2} + C.$$

Deci :

$$(1) \qquad \int_0^X e^{-tu}\sin u\,du = \frac{1 - (\cos X + t \sin X)e^{-tX}}{1 + t^2}.$$

Integrala $\int_0^\infty e^{-tu} \sin u\,du$ este convergentă pentru $t > 0$, pentru că membrul al doilea al egalității (1) are o limită pentru $X \to +\infty$ egală cu $\frac{1}{1 + t^2}$, pentru $t > 0$.

Expresia nu are limită pentru $t \leqslant 0$, integrala este deci divergentă pentru aceste valori ale lui t.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar:

$$\int_0^{\infty} e^{-tu} \sin u \, du = \frac{1}{1+t^2}; \quad \forall t > 0$$

2) a) $\int_0^X e^{-t(x+u)} \sin u \, du$ converge uniform către $\int_0^{\infty} e^{-t(x+u)} \sin u \, du$ pe intervalul $[a, b]$

$$|e^{-t(x+u)} \sin u| \leqslant e^{-t(x+u)} \leqslant e^{-tu} (u \geqslant 0 \text{ şi } x > 0)$$

deci:

$$|e^{-t(x+u)} \sin u| \leqslant e^{-au} \text{ pentru } t \in [a, b], \text{ unde } a > 0$$

integrala $\int_0^{\infty} e^{-au} du$ este convergentă; deci $\int_0^{\infty} e^{-t(x+u)} \sin u \, du$ este uniform convergentă pentru $t \in [a, b]$, $a > 0$ (regula lui Weierstrass).

b) Calculul lui $\int_a^b \left[\int_a^{\infty} e^{-t(x+u)} \sin u \, du\right] dt$: Funcţia $(u, t) \to e^{-t(x+u)} \sin u$ este continuă pe $[0, \infty[\times [a, b]$. Convergenţa uniformă a integralei stabilită mai sus permite atunci integrarea sub semnul integral:

$$\int_a^b \left[\int_0^{\infty} e^{-t(x+u)} \sin u \, du\right] dt = \int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-t(x+u)} \sin u \, dt\right] du.$$

Primul membru al egalităţii de mai sus se scrie:

$$\int_a^b e^{-tx} \left(\int_0^{\infty} e^{-tu} \sin u \, du\right) dt$$

al doilea membru al egalităţii de mai sus se scrie:

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-t(x+u)}}{x+u}\right]_a^b \sin u \, du$$

de unde:

$$\int_a^b \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a(x+u)} - e^{-b(x+u)}}{x+u} \sin u \, du.$$

CAPITOLUL VI

DIFERITE ALTE INTEGRALE

493. Schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg} t$ conduce la integrala:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos t} dt$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$I = \ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\, dt$$

în integrala a doua se face schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{4} - u$ și rezultă:

$$I = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\, du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\, dt$$

deci $I = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$.

494. Integrala este convergentă vezi exercițiul nr. 397.
Se notează

$A = \int_0^h e^{-\frac{a^2}{x^2}} dx$ și se face schimbarea $t = \frac{a}{x}$, se obține

$$A = a\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Se integrează prin părți $\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$ și se obține

$$\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}e^{-t^2}\right]_{\frac{a}{h}}^{\infty} - 2\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$A = he^{-\frac{a^2}{h}} - 2a\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Se consideră $B = \int_0^h e^{-\frac{b^2}{x^2}} dx$, prin schimbarea $t = \frac{b}{x}$ se obține

$$B = he^{-\frac{b^2}{h^2}} - 2b\int_{\frac{b}{h}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Atunci $A - B = 2(b-a)\int_{\frac{b}{h}}^{\infty} e^{-t^2} dt + h\left(e^{-\frac{a^2}{h^2}} - e^{-\frac{b^2}{h^2}}\right)$

de unde $\lim_{h\to\infty}(A - B) = 2(b-a)\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt + \lim_{h\to\infty} h\left(e^{-\frac{a^2}{h^2}} - e^{-\frac{b^2}{h^2}}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

dar cum $\lim\limits_{h\to\infty} h\left(e^{-\frac{a^2}{h^2}} - e^{-\frac{b^2}{h^2}}\right) = 0$ rezultă:

$$\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

495. Integrala este convergentă. Schimbarea de variabilă $x = \cos t$ conduce la

$$I = \int_0^\pi \cos^3 t \ln \frac{1+\cos t}{1-\cos t}\, dt \text{ sau } \frac{I}{2} = \int_0^\pi \cos^3 t \ln \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\, dt.$$

Se integrează prin părți luînd $u = \ln \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$ și $dv = \cos^3 t$, deci $du = -\frac{dt}{\sin t}$; $v = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$

$$\frac{I}{2} = \left[\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right) \ln \operatorname{cot g} \frac{t}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right) \frac{dt}{\sin t}.$$

Dar $\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\ln \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$ se anulează la capetele intervalului $[0, \pi]$ (se aplică regula lui l'Hôspital).

Așadar: $\frac{I}{2} = \pi - \frac{1}{6}\int_0^\pi (1 - \cos 2t)dt$; $I = \frac{5\pi}{3}$.

496. Se împarte intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ în n subintervale egale și se aplică sumele integrale Darboux, rezultă

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left[\ln \sin\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \ln \sin\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + \ln \sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sau

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \ln\left[\sin\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Dar $\sin\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

(v. vol. I exercițiul 103); deci

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \frac{\ln n - 2(n-1)\ln 2}{2} \text{ sau}$$

$$I = \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{n} - \frac{2(n-1)}{n}\ln 2\right] = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Altfel se face schimbarea de variabilă $x = 2t$ și se obține

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t \, dt \text{ sau}$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin t \cos t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) dt$$

$$\text{deci } I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, dt$$

în integrala a doua se face schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - u$ și se obține

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du$$

de unde $I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du$ sau $I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$

Așadar $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ sau $I = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2}$.

497. Se reduce la precedenta prin schimbarea $x = \sin t$.

498. 1) I_n este o integrală abeliană atașată cercului $x^2 + y^2 = 1$. Metoda de reducere constă în a scrie:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n \sqrt{1-x^2}\right] = nx^{n-1}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

și apoi a integra termen cu termen. În cazul general este vorba de integrale nedefinite. Aici se integrează de la 0 la 1. Se obține: $0 = nI_{n-1} - (n+1)I_{n+1}$, $n \geqslant 1$ unde

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$$

Prin urmare $I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \quad 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

2) Se face în I_{2n+1} schimbarea de variabilă $x = \sqrt{1 - \frac{t^2}{n}}$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține $I_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} J_n$ unde $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$

cînd $n \to \infty$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$, are pentru fiecare valoare a lui t o limită egală cu e^{-t^2}. Formal J_n tinde deci către $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$. Se prezintă însă o dificultate. Într-adevăr cu toate că șirul $S_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ tinde uniform către $S(t) = e^{-t^2}$ în intervalul $0 \leqslant t \leqslant \infty$, nu avem totuși dreptul de a afirma că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} S_n(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

căci domeniul de integrare depinde de n și devine la limită infinit. Vom proceda în felul următor:

a) se demonstrează în primul rînd inegalitățile următoare, valabile pentru $0 \leqslant \alpha \leqslant n$

$$1 - \frac{\alpha}{n} \leqslant e^{-\frac{\alpha}{n}}; \quad 1 + \frac{\alpha}{n} \leqslant e^{\frac{\alpha}{n}}; \quad 1 - \frac{\alpha^2}{n} \leqslant \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^n$$

Prima se stabilește considerînd funcția: $f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1 + \frac{\alpha}{n}$ care este crescătoare cînd α crește începînd de la 0 și care este nulă pentru $\alpha = 0$, a doua și a treia se demonstrează în mod analog.

b) Din aceste trei inegalități, se deduce:

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{n}\right) e^{-\alpha} \leqslant \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \leqslant e^{-\alpha} \text{ sau } 0 \leqslant e^{-\alpha} - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \leqslant \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{n} \quad (1)$$

se deduce în primul rînd că, pentru $n \to \infty$ șirul egal cu $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n$ pentru $0 \leqslant \alpha \leqslant n$, și cu 0 pentru $\alpha \geqslant n$, tinde uniform către $e^{-\alpha}$ pe intervalul $0 \leqslant \alpha < \infty$ căci $\sup_{\alpha} \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{n} = \frac{4e^{-2}}{n}$ tinde către 0 cu $\frac{1}{n}$.

c) Se notează $\alpha = t^2$ și integrăm dubla inegalitate (1) de la $t = 0$, la $t = \sqrt{n}$:

$$0 \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{t^4 e^{-t^2}}{n} dt$$

Cînd $n \to \infty$, integrala $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{t^4 e^{-t^2}}{n} dt$ tinde către 0 căci ea este pozitivă și inferioară cîtului prin n a integralei $\int_0^{\infty} t^4 e^{-t^2} dt$ care reprezintă un număr bine determinat. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem : $2nI_{2n}I_{2n+1} = \frac{(2n)!2n}{(2n+1)!}\frac{\pi}{2} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ limita, cînd $n \to \infty$ este $\frac{\pi}{2}$.

Dar I_n este o funcţie descrescătoare de n.

Deci :

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

Se deduce că $\lim_{n\to\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$, n variind indiferent prin valori pare sau impare.

Dar $J_n = I_{2n+1}\sqrt{n} = I_{2n+1}\sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

Deci J_n tinde către $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Aşadar $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Observaţie. Se notează $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$ pentru $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$

$$f_n(t) = 0 \text{ pentru } t \geqslant \sqrt{n}$$

Avem : $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^\infty f_n(t)dt$

$f_n(t)$ tinde uniform către e^{-t^2}.

Intervalul de integrare este independent de n. Nu se poate totuşi afirma că limita integralei este egală cu integrala limitei, căci teorema asupra integrării şirurilor uniform convergente nu este valabilă decît dacă intervalul de integrare este finit. Teorema generală care justifică aici trecerea la limită este teorema lui Lebesgue. Ea se aplică relativ la o măsură aleasă, care va fi în cazul nostru măsura ordinară a lui Lebesgue, dacă :

a) $f_n(t)$ este sumabilă. Este cazul, pentru că $f_n(t)$ este integrabilă în sensul lui Riemaun şi se anulează în afara unui interval finit ;

b) $f_n(t)$ tinde pentru fiecare t dat, către o limită. Această limită este e^{-t^2};

c) $f_n(t)$ este majorată printr-o funcţie sumabilă. Acest lucru trebuie monstrat. Rezultă din inegalitatea $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$ demonstrată mai sus, şi valabilă de asemenea pentru funcţia $f_n(t)e^{-t^2}$; este sumabilă căci integrala $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ există. Trecerea la limită este deci justificată.

499. Trinomul $1 - 2x\cos\theta + x^2$ este strict pozitiv pentru $|x| \neq 1$ şi $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Integrala $I(x)$ există cu siguranţă dacă $|x| \neq 1$. Pentru $x = 1$, funcţia $1 - 2x\cos\theta + x^2$ se reduce la $2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$.

$4\sin^2\frac{\theta}{2}$ este un infinit mic echivalent cu θ^2, convergenta lui $I(1)$ este echivalentă cu aceea a integralei

$$\int_0^\pi \ln\,\theta^2\,d\theta \text{ sau } \int_0^\pi \ln\,\theta\,d\theta$$

Cum $\ln\theta$ este integrabilă în vecinătatea originei, se deduce existența lui $I(x)$ pentru $x = 1$. Un raționament analog arată că $I(-1)$ este definită.

În concluzie integrala $I(x)$ are un sens pentru toate valorile lui x. Să arătăm că $I(x)$ este o funcție continuă de x. În vecinătatea unei valori x diferită de ± 1, $\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ este o funcție continuă de x și θ. Integrala este deci continuă în vecinătatea oricărei valori a lui x în afară de ± 1. Pentru $x = 1$, $I(x)$ este o integrală generalizată; vom transforma integrala făcînd schimbarea $\frac{1+x^2}{2x} = t$, t este un număr superior lui 1, care tinde către 1 descrescînd. Se obține:

(1) $\int_0^{\pi} \ln(t - \cos\theta)d\theta$ pe care o vom integra prin părți.

Se obține $[\theta \ln(t - \cos\theta)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\theta \sin\theta}{t - \cos\theta} d\theta$.

Primul termen este o funcție continuă de t. Să arătăm că ε fiind dat, se poate găsi un număr α, independent de t, astfel că

$$0 < \int_0^{\alpha} \frac{\theta \sin\theta}{t - \cos\theta} d\theta < \varepsilon$$

Dar cum $t \geqslant 1$, $\frac{1}{t - \cos\theta} < \frac{1}{1 - \cos\theta}$ și

$$\int_0^{\alpha} \frac{\theta \sin\theta}{t - \cos\theta} d\theta \leqslant \int_0^{\alpha} \frac{\theta \sin\theta}{1 - \cos\theta} d\theta.$$ Dar funcția $\frac{\theta \sin\theta}{1 - \cos\theta}$

definită pentru $0 < \theta \leqslant \alpha$ și egală cu 2 pentru $\theta = 0$ este o funcție continuă, chiar pentru $\theta = 0$. Ea admite o margine superioară finită M.

Integrala $\int_0^{\alpha} \frac{\theta \sin\theta}{1 - \cos\theta} d\theta$ este inferioară lui $M\alpha$. Inegalitatea $M\alpha < \varepsilon$, determină un număr α independent de t. Integrala (1) este deci uniform convergentă într-un interval închis începînd de la $t = 1$.

2) Polinomul $x^{2n} - 1$ are ca zerori cele $n - 1$ numere complexe $\omega_p = e^{\frac{2i\pi}{2n}p}$, $p = 1, 2, \ldots, n-1$ conjugatele lor $\bar{\omega}_p = e^{-\frac{i\pi}{n}p}$ și cele două numere reale $+1$ și -1.

Descompunerea sa în factori se traduce prin identitatea:

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{p=1}^{n-1}(x - \omega_p)(x - \bar{\omega}_p) \text{ sau}$$

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{p=1}^{n-1}\left(1 - 2x\cos\frac{p}{n}\pi + x^2\right)$$

și deci

$$(2)\quad \prod_{p=1}^{n-1}\left(1 - 2x\cos\frac{p}{n}\pi + x^2\right) = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}$$

Se observă că funcţia $P_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ fiind un polinom în x este o funcţie continuă. Prin urmare:

(3) $P_n(+1) = P_n(-1) = n.$

Se poate defini integrala $I(x)$ ca limita unei sume Darboux, obţinută împărţind intervalul $[0, \pi]$ prin punctele $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\pi$, aşadar

$$I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \ln\left(1 - 2x\cos p\frac{\pi}{n} + x^2\right)$$

adică:

(4) $I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \ln P_n(x).$

Această limită se calculează după cum urmează. Dacă $|x| < 1$, cînd $n \to \infty$, $P_n(x)$ tinde către $\frac{1}{1-x^2}$ deci conform cu (4) se obţine $I(x) = 0$.

Dacă $|x| = 1$. Avem $I(\pm 1) = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{\pi}{n} \ln n = 0$

deci $I(\pm 1) = 0$.

Dacă $|x| > 1$, cînd $n \to \infty$; $\ln P_n(x)$ este echivalent cu $\ln x^{2n} = 2n \ln|x|$. Deci

$$I(x) = 2\pi \ln|x|.$$

Aşadar:

(5) $I(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 2\pi\ln|x| & \text{dacă } |x| \geqslant 1 \end{cases}$

3) Avem $I(-x) = I(x)$ (6) şi $I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln|x|$, (7)

Într-adevăr:

$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2)d\theta$, se face schimbarea de variabilă $\theta = \pi - \varphi$ şi se obţine

$$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2)d\varphi = I(x):$$

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta, \text{ de unde:}$$

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)d\theta + \int_0^{\pi} \ln\frac{1}{x^2}\, d\theta$$

Aşadar

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi\ln|x|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se arată că:

(8) $I(x) = \frac{1}{2} I(x^2)$; într-adevăr $I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)d\theta$ și $I(-x) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2)d\theta$, adunînd aceste egalități și ținînd seama de $I(-x) = I(x)$ se obține:

$$2I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x^2\cos^2\theta + x^4)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x^2\cos\varphi + x^4)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x^2\cos\varphi + x^4)d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 - 2x^2\cos\varphi + x^4)d\varphi$$

în ultima integrală se face $\varphi = \pi + \psi$ și se obține

$$2I(x) = \frac{1}{2} I(x^2) + \frac{1}{2} I(-x^2) \text{ sau } 2I(x) = I(x^2)$$

ținînd seamă de (6), așadar $I(x) = \frac{1}{2} I(x^2)$.

Se deduce că $I(x) = \frac{1}{4} I(x^4)$ și mai general că:

(9) $I(x) = \frac{1}{2^n} I(x^{2^n})$, $n \in \mathbf{N}$.

Se presupune $|x| \leqslant 1$. Atunci $|x|^{2^n} \leqslant 1$. Se știe că $I(x)$ este o funcție continuă. $|I(x)|$ are deci o margine superioară finită M pe intervalul $(-1, 1)$. Egalitatea (9) arată atunci că: $|I(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} M$. Făcînd $n \to \infty$ se vede că $I(x) = 0$, dacă $|x| \leqslant 1$. În aceleași condiții, relația (7) arată atunci că:

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = 0 + 2\pi\ln\frac{1}{|x|}, \quad \left|\frac{1}{x}\right| \geqslant 1$$

deci

$$I(y) = 2\pi\ln|y|, \quad |y| \geqslant 1$$

am obținut așadar rezultatele (5).

4) $\frac{\partial}{\partial x}(1 - 2x\cos\theta + x^2) = \frac{2(x - \cos\theta)}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$

derivata este o funcție continuă de x și θ în dreptunghiul $[0, \pi] \times [x_1, x_2]$, dacă intervalul $[x_1, x_2]$ nu conține nici pe -1 și nici pe 1. Atunci funcția $I(x)$ este de clasă C^1 pentru orice valoare a lui x diferită de -1 și de $+1$, așadar:

$$\frac{dI}{dx} = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}(1 - 2x\cos\theta + x^2)d\theta = 2J(x)$$

Dar $I(x) = 0$; dacă $|x| < 1$, deci $J(x) = 0$, dacă $|x| < 1$ cum $I(x) = \pi\ln x^2$ dacă $|x| > 1$ rezultă $J(x) = \frac{\pi}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

5) Făcînd schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$ se obține

$$J(x) = \int_0^{\infty} \frac{x(1+t^2)-(1-t^2)}{(1+x^2)(1+t^2)-2x(1-t^2)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

Fracția rațională de integrat are ca descompunere în elemente simple reale:

$$\frac{1}{x(1+t^2)} + \frac{x-1}{x(x+1)} \cdot \frac{1}{t^2+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

de unde rezultă: $J(x) = \frac{1}{x}\left[\operatorname{arc\,tg}\, t - \operatorname{arc\,tg}\left(t\,\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\infty}$

dacă $|x| < 1 \to \frac{1+x}{1-x} > 0 \to \left[\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \to J(x) = 0$

dacă $|x| > 1 \to \frac{1+x}{1-x} < 0 \to \left[\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2} \to J(x) = \frac{\pi}{x}$

6) Am văzut că $I(1) = 0$. Făcînd schimbarea de variabilă $\theta = 2t$ se deduce ușor că integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt$ este egală cu $\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$. Ne propunem a regăsi o valoare a acestei integrale integrînd sub semnul integral funcția

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2\operatorname{tg}^2 t}\, dt$$

Funcția de sub semnul integral este discontinuă pentru $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$. Dar ea este majorată de constanta 1, care nu depinde de x. Integrala este deci uniform convergentă și se poate integra sub semnul integral de la $x = 0$ la $x = 1$.

Avem:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\operatorname{tg}^2 t}$$

Dar

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{tg} t}\left[\operatorname{arctg}(x\operatorname{tg} t)\right]_0^1 = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$$

Deci

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\operatorname{tg} t} = \left[t \ln \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar se poate calcula în primul rînd $f(x)$. Dacă se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} t = u$, avem:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}=\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\infty}\frac{x^2du}{1+x^2u^2}\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{x\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2}\,\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

Deci

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\frac{\pi}{2}\,|\ln(1+x)|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Aşadar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$

500. 1) Nu se schimbă convergenta unei integrale făcînd o schimbare de variabilă, în cazul de faţă $kx = t$:

$$\int_u^{\infty}\frac{f(kx)}{x}\,dx=\int_{ku}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=\int_{ku}^{1}\frac{f(t)}{t}\,dt+\int_1^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

Funcţia $t\to\dfrac{f(t)}{t}$ este integrabilă în $[ku,\ 1]$, pentru că ea este continuă şi este integrabilă în $[1,\ +\infty[$ prin ipoteză; ea este deci integrabilă în $[ku,\ +\infty[$.

Aplicînd rezultatul precedent luînd $k = b$ şi $k = a$ se obţine

$$\int_u^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx=\int_{bu}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{au}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

2) Funcţia $x\to\dfrac{f(bx)-f(ax)}{x}$ este integrabilă în $[0,\ +\infty[$ dacă integrala din această funcţie în $[u,\ +\infty[$ are o limită cînd $u\to 0$ adică:

$$\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\,dt \text{ are o limită cînd } u\to 0.$$

$S(u)=\sup\limits_{t\in[au,\ bu]}|f(t)-f(0)|$, tinde către 0 (continuitatea funcţiei f pentru valoarea 0) şi de asemenea

$$\int_{bu}^{au}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\leqslant S(u)\int_{bu}^{au}\frac{dt}{t}=S(u)\ln\frac{b}{a}$$

În aceste condiții cînd $u \to 0$:

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{bu}^{au} f(0)\frac{dt}{t} + \int_{bu}^{au} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt \to f(0)\ln\frac{b}{a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,du = \lim_{u\to 0}\int_u^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

3) Funcția exponențială este continuă în $\mathbf{R}$; cînd $t \to \infty$, produsul te^{-t} are limita 0, există deci o valoare t_0 astfel ca:

$$t \geqslant t_0 \to te^{-t} < 1 \to \frac{e^{-t}}{t} < \frac{1}{t^2}$$

Funcția $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ este integrabilă în $[1, +\infty[$ și ipotezele făcute asupra funcției f sînt verificate pentru funcția $t \to e^{-t}$. Prin urmare funcția

$$t \to \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$$

este integrabilă în $]0, \infty[$ și

$$\int_{+0}^{+\infty} \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,dt = e^0 \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{a}{b}$$

501. Se consideră o funcție de valoare constantă A pe $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ și nulă în exterior; pentru orice $n > 0$

$$\left\|\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right\| = \left\|A\int_\alpha^\beta e^{inx}dx\right\| = \|A\|\left|\frac{e^{in\beta}-e^{-in\alpha}}{in}\right| \leqslant \frac{2}{n}\|A\|$$

de unde:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}dx = 0$$

această proprietate se extinde prin aditivitatea integralei la orice funcție în scară pe $[a, b]$. Fie f o funcție integrabilă pe $[a, b]$; pentru orice ε există o funcție φ în scară astfel că:

$$\int_a^b ||f(x)-\varphi(x)||dx < \varepsilon;\ \text{pentru această funcție } \varphi$$

$$(\exists N_0),\ (\forall n):\ n > N_0 \to \left\|\int_a^b \varphi(x)e^{inx}dx\right\| < \varepsilon.$$

și prin urmare:

$$(\forall n):\ n > N_0 \to \left\|\int_a^b f(x)e^{inx}dx\right\| \leqslant \left\|\int_a^b \varphi(x)e^{inx}dx\right\| +$$

$$+\left\|\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]e^{inx}dx\right\| \leqslant 2\varepsilon$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația rămîne valabilă dacă se înlocuiește e^{inx} prin e^{-inx}; rezultatul se extinde prin adunare și scădere la I_n și K_n.

502. a) Pentru $n \geqslant 1$

$$I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi) = 2\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = 0$$

deci

$$I_0 = 0 \to (\forall n \in \mathbf{N}) : I_{2n} = 0$$

$$I_1 = \pi \to (\forall n \in \mathbf{N}) : I_{2n+1} = \pi$$

b) $$I_n(\pi - a) = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{\sin t}\, dt$$

(se face schimbarea de variabilă $x = \pi - t$) și prin urmare pentru $\forall n \in \mathbf{N}$:

1) $$I_{2n+1}(a) + I_{2n+1}(\pi - a) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt = \pi$$

2) $$I_{2n}(a) - I_{2n}(\pi - a) = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt = 0$$

Pe de altă parte

$$I_{n+1}(a) - I_n(a) = \int_0^{a} \cos nx\, dx - \int_0^{a} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \sin nx\, dx$$

Prima integrală are în mod evident limita nulă și în mod analog a doua integrală, pentru că $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ satisface ipotezelor din exercițiul precedent pe $[0, a]$, așadar

3) $$\lim_{n \to \infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$$

Din egalitatea 2) se deduce
$I_{2n+1}(a) - I_{2n+1}(\pi - a) = I_{2n+1}(a) - I_{2n}(a) - [I_{2n+1}(\pi - a) - I_{2n}(\pi - a)]$
și prin urmare după 3) $\lim_{n \to \infty} [I_{2n+1}(a) - I_{2n+1}(\pi - a)] = 0$ care împreună cu 1) dă:

$$\lim_{n \to \infty} I_{2n+1}(a) = \lim_{n \to \infty} I_{2n+1}(\pi - a) = \frac{\pi}{2}$$

și în mod analog după 3)

$$\lim_{n \to \infty} I_{2n}(a) = \lim_{n \to \infty} I_{2n}(\pi - a) = \frac{\pi}{2}$$

adică

$$\forall a \in]a, \pi[: \lim_{n \to \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $$\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^a \frac{x - \sin x}{x \sin x}\sin nx\,dx$$

$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ poate fi prelungită în 0 prin continuitate $\left(f(x) \sim \frac{x}{6}\right)$; integrala are deci o limită nulă pentru $n \to \infty$.

Avem $\forall a \in]a, \pi[: \lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ schimbarea de variabilă $nx =$ conduce la:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Integrala fiind convergentă pentru limita $+\infty$ (vezi exercițiul 412), avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

CAPITOLUL VII

APLICAȚIILE INTEGRALEI DEFINITE ÎN GEOMETRIE ȘI MECANICĂ

503. $A = 2\int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^3 + 4a^3} - \frac{x^2}{4a}\right) dx = 2a^2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$.

504. Curba taie axa Ox în punctele de abscisă o și $2a\pi$

$$A = \int_0^{2a} \left(1 - \cos\frac{x}{a}\right) dx = 2\pi a^2$$

505. $A = -2\int_{-a}^{0} x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \frac{a^2}{2}(4 - \pi)$ (vezi ex. 127).

506. Se folosește reprezentarea parametrică a curbei:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

și se calculează aria cu formula

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx')\,dt.$$

$$\frac{A}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\cos^2 t \sin^2 t\,dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$A = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

507. Ecuaţia curbei în coordonate polare este

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

şi este simetrică faţă de axele de coordonate, deci

$$\frac{A}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

funcţia fiind pară se face $\operatorname{tg}\theta = t$ şi rezultă

$$A = 2\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \pi\sqrt{2} \quad \text{(vezi ex. 132).}$$

508. $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$ este ecuaţia curbei în coordonate polare

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\theta\, d\theta = a^2.$$

509. $3\pi a^2$, adică triplul ariei cercului generator.

510. $\rho = \sqrt{\dfrac{2\cos 2\theta - 1}{\cos 2\theta}}$ este ecuaţia curbei în coordonate polare

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2\theta - 1}{\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{3} - \ln\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

511. $A = 2\int_0^{\pi} \frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}.$

512. $A = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}^2\theta)^2 d\theta = a^2\left(\pi - \frac{8}{3}\right).$

513. $A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right)a^2$

Scanned with OKEN Scanner

514. $A = a^2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^6 \frac{\theta}{3}}$ în care se face $\frac{\theta}{3} = u$ și rezultă $I_6 = \frac{du}{\cos^6 u}$, care se calculează cu formula de recurență:

$$I_6 = \frac{\sin u}{5\cos^5 u} + \frac{4\sin u}{15\cos^3 u} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} u$$

de unde

$$A = \frac{72\sqrt{3}}{5} a^2.$$

515. $S = \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2 + 7}{8}.$

516. Se ia y ca variabilă, $x' = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$,

$$S = \int_b^a \sqrt{1 + x'^2}\, dy = a\int_b^a \frac{dy}{y} = a \ln \frac{a}{b}.$$

517. $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$; $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx$

deci

$$s = 4a^{\frac{1}{2}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = 6a.$$

518. $s = \frac{x}{8a^3} (x^2 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}$.

519. $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$

deci

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

520. $ds = \left(3\cos t \sin t - \frac{1}{2}\right) dt$ deci $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos t \sin t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{6 - \pi}{4}$.

521. $ds = \frac{3(1 + t^2)}{(1 - t)^4}\, dt$. Limitele se deduc din reprezentarea parametrică

$$s = 3\int_{-\infty}^{2-\sqrt{3}} \frac{1 + t^2}{(1 - t)^4}\, dt + 3\int_{2+\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1 + t^2}{(1 - t)^4}\, dt = 3\sqrt{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

522. $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = a \sin^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta$, $s = \frac{3\pi a}{2}$.

523. $ds = a \sin^3 \frac{\theta}{4}\, d\theta$. $s = 4a\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos^3 \frac{\pi}{16} - \cos \frac{\pi}{16}\right)$.

524. $s = 2a \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{\theta}{4}} = 12\, a\sqrt{3}$. Integrala se calculează cu formula de recurență (vezi 204).

525. Curba este o elice de ecuații parametrice

$$x = x,\ y = \frac{x^3}{3},\ z = \frac{1}{2x} \text{ iar } ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \left(x^2 + \frac{1}{2x^2}\right) dx$$

deci

$$s = y - z - (y_0 - z_0).$$

526. Avem $x^2 + y^2 = a^2 e^{-2t} = \frac{a^2 z^2}{b^2}$, deci curba este așezată pe conul $b^2(x^2 + y^2) - a^2 z^2 = 0$. $s = \sqrt{2a^2 + b^2}$.

527. $x' = -a \frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y' = -2 \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $z' = a$ $ds = a\sqrt{2} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}$

$$\text{deci } s = a\sqrt{2} \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{1 - 2\sin^2 t}}\, dt = a\frac{\pi}{4}.$$

528. $s = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\, t$.

529. Luînd pe x ca parametru se obține $ds = a\sqrt{2a} \frac{dx}{(2a - x)\sqrt{x}}$ de unde

$$s = a\sqrt{2a} \int_0^{x_0} \frac{dx}{(2a - x)\sqrt{x}} = a \ln \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x_0}};\ x_0 < 2a$$

530. Curba este intersecția sferei cu cilindru care are generatoarele paralele cu Oz. Se reprezintă curba parametric; $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ de unde $\rho \operatorname{ch} \theta = a$. Rezultă

$$x = \frac{a \cos \theta}{\operatorname{ch} \theta},\ y = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \theta}$$

care introduse în ecuația sferei sau $z = \pm a \operatorname{th} \theta$.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \frac{1 + \operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta}{\operatorname{ch}^4\theta} = \frac{2a^2}{\operatorname{ch}^2\theta},$$

deci

$$ds = \frac{\sqrt{2}\, a}{\operatorname{ch} \theta}\, d\theta \text{ iar } s = a\sqrt{2} \int_0^{\theta} \frac{2\, d\theta}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = 2a\sqrt{2} \int_0^{\theta} \frac{e^{\theta}\, d\theta}{e^{2\theta} + 1}$$

$$= \left| 2a\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} e^{\theta} \right|_0^{\theta} = 2a\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left| \sqrt{\frac{a + z}{a - z}} \right|_0^z = 2a\sqrt{2} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a + z}{a - z}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Scanned with OKEN Scanner

căci

$$\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = \frac{z}{a},$$

de unde

$$e^{\theta} = \sqrt{\frac{a + z}{a - z}}.$$

531. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

deci

$$V = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

532. $V = \frac{32\pi a^3}{105}$.

533. $V = \pi \int_1^3 \frac{(x-1)(3-x)}{x^2} dx = 4\pi (\ln 3 - 1)$.

534. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

535. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $A = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y ds = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 4\pi a^2$.

536. $x = a\cos t$, $y = b + a\sin t$ sînt ecuaţiile parametrice ale cercului, iar $ds = adt$, deci

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a\sin t) a dt = 2a\pi \cdot 2b\pi = 4ab\pi^2$$

aceasta este aria torului.

537. $A = 2\pi \int_{-a}^{a} y ds$

iar

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt$$

unde

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ este pătratul excentricităţii deci

$$A = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \sin t\, dt;$$

se face $\cos t = u$ şi se obţine $A = 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - e^2 u^2}\, du$, printr-o nouă substituţie $eu = \sin z$ rezultă:

$$A = \frac{4\pi ab}{e} \int_0^{\arcsin e} \sqrt{1 - \sin^2 z} \cos z\, dz = \frac{2\pi a^2 b}{c}(\arcsin e + e\sqrt{1 - e^2}) =$$

$$= 2\pi a^2 \left(\frac{b}{c} \arcsin e + \frac{b}{a}\sqrt{1 - e^2}\right) = 2\pi a^2 \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \arcsin e + 1 - e^2\right)$$

În jurul lui Oy avem

$$A = 4\pi \int_0^b x\,ds = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e}\right).$$

538. $A = 4\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{12\pi a^3}{5}.$

539. $A = \frac{64\pi a^3}{3}.$

540. $ds = 2a \sin \frac{\theta}{2}\,d\theta;$

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{32\pi a^3}{5}.$$

541. $x_G = \frac{\int_0^{2\pi} x\,ds}{\int_0^{2\pi} ds} = \pi a;\quad y_G = \frac{\int_0^{2\pi} y\,ds}{\int_0^{2\pi} ds} = \frac{4a}{3}.$

542. $x_G = a;\quad y_G = \frac{3\pi a}{8}.$

543. $x_G = \frac{a \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)\cos\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta} = \frac{4a}{5};$

$$y_G = \frac{a \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)\sin\theta \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta} = \frac{4a}{5}.$$

544. $x_G = a\pi;\quad y_G = \frac{4a}{3};\quad z_G = 0.$

545. $x_G = \frac{2}{5};\quad y_G = -\frac{1}{5};\quad z_G = \frac{1}{2}.$

546. $x_G = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{4a}{3\pi};\quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{4b}{3\pi}.$

Scanned with OKEN Scanner

547. $x_G = \dfrac{\int_0^a x(y_1 - y_2)\,dx}{\int_0^a (y_1 - y_2)\,dx}$,

y_1 este ordonata unui punct de pe arcul de elipsă iar y_2 este ordonata unui punct de pe dreapta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

iar

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{\int_0^a (y_1 - y_2)\,dx}.$$

Se obţine

$$x_G = \frac{2a}{3(\pi - 2)};$$

$$y_G = \frac{2b}{3(\pi - 2)}.$$

548. Centrul de greutate este pe Ox deci $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{\int_0^{2a} x(y_2 - y_1)\,dx}{\int_0^{2a} (y_2 - y_1)\,dx}$$

unde

$$y_2 = x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

şi

$$y_1 = -x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

Se obţine

$$x_G = \frac{\int_0^{2a} x^2\sqrt{\frac{x}{2a - x}}\,dx}{\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}\,dx}.$$

Pentru calculul integralelor se face

$$\sqrt{\frac{x}{2a - x}} = t$$

de unde

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$\int_0^{2a} x^2 \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 16a^3 \int_0^{\infty} \frac{t^6}{(1+t^2)^4}\,dt$$

Prin transformarea $t^2 = \frac{u}{1-u}$ rezultă

$$\int_0^{\infty} \frac{t^6}{(1+t^2)^4}\,dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{3!} = \frac{5\pi}{32}$$

iar

$$\int_0^{2a} x^2 \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = \frac{5\pi a^3}{2}.$$

Analog

$$\int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 8a^2 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8a^2 \cdot \frac{3\pi}{16}$$

de unde

$$x_G = \frac{5a}{3}.$$

549. Cercul se taie cu parabola în $O(0, 0)$ și $A(a, a)$. Dacă y_1 este ordonata unui punct de pe care și y_2 a unui punct de pe parabolă

$$x_G = \frac{\int_0^a x(y_1 - y_2)dx}{\int_0^a (y_1 - y_2)dx} = \frac{15\pi - 44}{15\pi - 40} a$$

și

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a (ax - x^2)dx}{\int_0^a (\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax})dx} = \frac{8}{3\pi - 8}.$$

550. $V = 2\pi^2 a^2 b$ și $S = 4\pi^2 ab$.

551. $V = 4\pi^2 a^2 b$.

552. Se calculează volumul obținut prin rotirea cardioidei în jurul axei Oy.

Avem $V_{oy} = \pi \int_0^{2\pi} x^2 dy = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 \cos^2\theta\,(\cos 2\theta + \cos\theta)d\theta = \frac{5\pi^2 a^3}{3}$.

Aria cardioidei este $A = \frac{3\pi a^2}{2}$. Centrul de greutate al plăcii se află pe axa de simetrie a curbei deci $y_G = 0$. Teorema lui Guldin ne dă

$$2\pi x_G \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{5\pi^2 a^3}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$x_G = \frac{5a}{6}.$$

553. Rotind bucla în jurul lui Oy se obţine $V_{oy} = 2\pi x_G A$. Centrul de greutate se află pe axa polară

$$V_{oy} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 dy$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = a \cos 2\theta \cos \theta, \quad y = a \cos 2\theta \sin \theta,$$

rezultă

$$V_{oy} = \frac{192\pi a^3\sqrt{2}}{630} \text{ iar } A = \frac{\pi a^2}{8}$$

deci

$$x_G = \frac{128a\sqrt{2}}{150}.$$

554. Dacă μ este densitatea arcului de cicloidă,

$$I_{ox} = \int_0^{2\pi} y^2 dm,$$

dar

$$dm = \mu ds = 2a\mu \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

deci

$$I_{ox} = 8\mu a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{\theta}{2} d\theta = 8\mu a^3 \frac{32}{15},$$

iar masa

$$M = 2a\mu \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

aşadar

$$I_{ox} = \frac{32}{15} M a^2.$$

555. $I_{ox} = \int_0^{2\pi} (y^2 + z^2) ds$, $I_{oy} = \int_0^{2\pi} (x^2 + z^2) ds$. $I_{oz} = \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) ds$

se obţine

$$I_{ox} = I_{oy} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \text{ şi } I_{oz} = a^2\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

SERII ÎNTREGI DE O VARIABILĂ REALĂ

Aplicînd regula lui d'Alembert primelor 10 serii rezultă :

556. $R = 1$; **557.** $R = \infty$; **558.** $R = \frac{1}{e}$ seria este convergentă pentru $|x| \leqslant \frac{1}{e}$; **559.** $R = e$; **560.** $R = 1$. **561.** $R = 1$. **562.** $R = 6$; **563.** $R = e$; **564.** $R = 0$; **565.** $R = 1$; **566.** $R = 1$ (Cauchy) ; **567.** $R = 2$ (Cauchy) ; **568.** $R = 1$ (Cauchy) ; **569.** $R = e$ (d'Alembert) ; **570.** $R = a$ (d'Alembert) ; **571.** $R = 1$ (d'Alembert) ; **572.** $\sqrt[n]{a^{n^2}} = a^n$.

Pentru $0 < a < 1$ limită de $a^n = 0$ deci $R = \infty$. Pentru $a > 1$ limita de $a^n = \infty$ deci $R = 0$. Pentru $a = 1$, $R = 1$. **573.** Pentru $n = 2p$ se obține $a_{2p} = l_1^p l_2^p$ și pentru $n = 2p + 1$, $a_{2p+1} = 1_1^{p+1} \cdot 1_2^p$.

Aplicînd regula lui Cauchy :

$$\sqrt[2p]{|a_{2p}|} = (l_1 l_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[2p+1]{|a_{2p+1}|} = |l_1|^{\frac{p+1}{2p+1}} |l_2|^{\frac{p}{2p+1}}.$$

Cele două limite sînt egale deci $R = \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}}$. De remarcat că regula lui d'Alembert nu dă nici un rezultat pentru o astfel de serie.

574. Se descompune seria în trei serii fiecare avînd raza 2 ; deci $R = 2$.

575. Fie $|a_n| < M$, seria va fi majorată de $\frac{M|x^n|}{n!}$ convergentă pentru orice x deci raza de convergență a seriei date este infinită.

576. $|\cos n\,\theta| < M$ și cum $\frac{M|x^n|}{n!}$ are raza infinită ; rezultă că seria dată are raza infinită.

577. Seria este majorată de seria cu termenul general $|x|^n$ convergentă pentru $|x| < 1$, deci și seria dată este convergentă pentru $|x| > 1$.

578. $R = \infty$. Seria derivată are ca termen general $\frac{(n+1)a^{n+1}x^n}{(n+1)!} = \frac{a^{n+1}x^n}{n!}$ adică seria inițială multiplicată cu a. Deci $S'(x) = aS(x)$. Se deduce $S(x) = ke^{ax}$. Pentru $x = 0$ $S(0) = 1$ de unde $K = 1$. Prin urmare $S(x) = e^{ax}$ pentru $a = 1$ $S(x) = e^x$.

579. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{\alpha - n}\right| = 1$; pentru $x < 1$, avem

$$S'(x) = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n =$$

$$\alpha \sum_0^\infty \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n = \alpha\, \underset{\alpha-1}{S(x)}.$$

Să studiem seria $(1+x)S'_\alpha(x)$; coeficientul termenului în x^n este

$$b_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \alpha a_n$$

Scanned with OKEN Scanner

Se deduce relaţia $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$. Integrînd: $S(x) = K(1+x)$. Făcînd $x = 0$ se găseşte $K = 1$.

580. O dublă derivare arată că $S''(x) = S(x)$, avem deci $S(x) = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$; $S(0) = 1$, $S'(0) = 0$ se obţine $S(x) = \operatorname{ch} x$. Analog se găseşte $T(x) = \cos x$. Făcînd suma celor două dezvoltări

$$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x) = \sum_0^\infty \frac{x^{4p}}{(4p)!}.$$

581. Funcţia f este definită pentru $x < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 - 1} = -(1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3p} + \ldots).$$

Dezvoltarea este valabilă pentru $|x| < 1$. Prin integrare se deduce:

$$f(x) = C - \sum_0^\infty \frac{x^{3p+1}}{3p+1}, \text{ pentru } x = 0$$

$$C = \int_{-2}^{0} \frac{dt}{t^3 - 1} = -\int_0^2 \frac{du}{u^3 - 1} = -\left(\frac{\ln 3}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$$

582. Pentru că $\dfrac{e^t - 1}{t} = \sum_1^\infty \dfrac{t^{n-1}}{n!}$, se obţine pentru un x oarecare $Y(x) = \sum_1^\infty \dfrac{x^n}{n \cdot n!}$ cu raza de convergentă infinită.

Pentru I integrăm prin părţi $I = |e^x \ln x|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}\, dx = e^2 \ln 2 - \int_1^2 \dfrac{e^x - 1}{x}\, dx - \int_1^2 \dfrac{dx}{x^2}$ de unde

$$I = (e^2 - 1)\ln 2 - [Y(2) - Y(1)]$$

Valoarea numerică cerută este 2,0622.

583. În dezvoltarea lui e^x facem $x = p$

$$e^p = 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \ldots + \frac{p^p}{p!} + \ldots + \frac{p^n}{n!} + \ldots$$

Termenii din membrul doi sînt pozitivi deci

$$e^p > \frac{p^p}{p!} \quad p! > \left(\frac{p}{e}\right)^p.$$

584. Se obţine

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$$

Fie $e = \dfrac{p}{q}$ cu p şi q întregi primi între ei.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră suma primilor $p+1$ termeni ai seriei, fie:

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^p}{p!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{1}{(n+p)!}.$$

Înmulțind cu $p!$ se deduce

$$N = (-1)^{p+1}\left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right],$$

unde N înseamnă un număr întreg. O astfel de egalitate este imposibilă, căci membrul doi este diferit de zero și valoarea sa absolută este mai mică decît $\frac{1}{p+1}$. Rezultă că e este irațional.

585. $$\frac{1}{\sqrt{1-x^p}} = (1-x^p)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^p + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 2^2}x^{2p} + \ldots +$$

$$+ \frac{1\cdot 35\ldots(2n-1)}{n!\,2^n}\cdot x^{np} + \ldots$$

și $$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(p+1)2^{p+1}} + \frac{13}{1\cdot 2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{(2p+1)2^{np+1}} + \ldots +$$

$$\frac{1\cdot 35\ldots(2n-1)}{n!\,2^n}\,\frac{1}{(pn+1)2^{np+1}} +$$

pentru $p \geqslant 0$; această serie este foarte repede convergentă. De exemplu pentru $p = 2$

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{1}{1\,280} + \frac{5}{14\,336} + \ldots$$

valoare puțin superioară lui 0,52.

586. Avem $\sqrt[m]{N} = a\left(1 + \frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$; cum $\frac{b}{a^m} < 1$ se poate dezvolta în serie, de unde

$$\sqrt[m]{N} = a\left[1 + \frac{b}{ma^m} + \frac{1(1-m)}{2!}\,\frac{b^2}{a^{2m}} + \ldots\right]$$

dacă $\frac{b}{a^m}$ este mic seria este rapid convergentă.

587. $$\sqrt[3]{31} = 3\left(1 + \frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27} - \frac{1}{3}\,\frac{2}{6}\left(\frac{4}{27}\right)^2 + \ldots\right]$$

588. $$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}} = 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5} - 1\right)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 -$$

$$= 1 - u_1 + u_2 - u_3 +$$

Căutînd suma primilor șapte termeni

$$u_1 = \frac{1}{5},\quad u_2 = \frac{1}{40}u_1,\quad u_3 = \frac{2}{20}u_2,\quad u_4 = \frac{11}{80}u_3,$$

$$u_5 = \frac{16}{100}\ u_4,\quad u_6 = \frac{7}{40}\ u_5 = 0{,}000\cdot002$$

se deduce $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \simeq 0{,}7944.$

589. Plecînd de la dezvoltările

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

și

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^n\ x^n + \ldots$$

Înmulțind membru cu membru după regula lui Cauchy, obținem

$$\frac{e^{-x}}{1+x} = 1 - 2x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) x^n + \ldots$$

Coeficientul lui x^n tinde la limită către e deci $R = 1$. Este cea mai mică dintre razele seriilor considerate.

590. Avem $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\ x^{2n} + \ldots$ pentru $|x| < 1$, care prin integrare ne dă

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Amplificînd membru cu membru se obține:

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}\ x^3 + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\ x^5 + \ldots + \frac{2\cdot4\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}\ x^{2n+1} + \ldots \text{ cu } |x| < 1.$$

591. Multiplicînd seriile lui $\ln(1+x)$ și a lui $\frac{1}{1+x}$ rezultă

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)x^n + \ldots,\ |x| < 1.$$

592. Produsul are termenul general

$$W_n = x^{2n+1}\left[\frac{1}{(2n)!\,1!} + \frac{1}{(2n-2)!\,3!} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul lui x^{2n+1} se scrie încă

$$\frac{1}{(2n+1)!}[C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-2} + \ldots + C_{2n+1}^{2} + 1].$$

Pe de altă parte $f(x) = \operatorname{ch} x$, $g(x) = \operatorname{sh} x$

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x = \frac{1}{2}\left[2x + \frac{2^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right].$$

Se obține egalitatea cerută egalînd coeficienții lui x^{2n+1}. Se poate de asemenea verifica direct.

593. Avem $e^{-(x+h)^2} = e^{-h^2} \cdot e^{-x^2} \cdot e^{-2hx}$. Se dezvoltă ultimii doi factori

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

$$e^{-2hx} = 1 - \frac{2hx}{1!} + \frac{2^2h^2x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n h^n x^n}{n!} + \ldots$$

Efectuînd produsul, dă

$$e^{-(x+h)^2} = e^{-h^2}\left(1 - \frac{2hx}{1!} + \frac{(2^2h^2 - 2)x^2}{2!} + \ldots + P_n(h)\frac{x^n}{n!} + \ldots\right)$$

unde $P_n(h) = (-1)^n[(2h)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2h)^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot (2h)^{n-4} + \ldots]$

594. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$, dezvoltînd $\cos 2x$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

rezultă

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n-2}$$

595. Avem $f(x) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$. Se dezvoltă cei doi logaritmi și se face diferența. Se obține

$$\ln(1 + x + x^2) = \sum_1^\infty a_n x^n$$

cu $a_{3p} = -\frac{2}{3p}$, $a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1}$, $a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$.

$R = 1$.

596. $f(x) = \ln(1 + x)(1 + x + x^2) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x) + \ln(1 - x^3)$. Se obține

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}[1 + (-1)^{n-1} + 3\eta_n] \text{ cu}$$

$\eta = 0$ pentru $n = 3p + 1$ sau $n = 3p + 2$ și
$\eta = -1$ pentru $n = 3p$.

Scanned with OKEN Scanner

597. $f(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

598. $f(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{2n-1}+1}{(2n)!}x^{2n},$

590. $f(x) = \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{6^{2n+1}-3^{2n-1}}{2(2n+1)!}x^{2n+1},$

600. $f(x) = 2(\cos x + \cos 3x) = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1+3^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$

601. Se poate folosi formula lui Mac-Laurin și se obține

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \ldots$$

sau se poate porni de la egalitatea $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$ în care se înlocuiesc $\sin x$ și $\cos x$ prin seriile corespunzătoare iar $\operatorname{tg} x$ printr-o serie întreagă cu grade impare de forma $a_1x + a_3x^3 + a^5x^5 + \ldots$
Adică

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

din identificare rezultă

$$a_1 = 1,\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_5 = \frac{2}{15}, \ldots$$

602. $x \operatorname{ctg} x \sin x = x\cos x$. Folosind procedeul de mai sus

$$(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots)\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

de unde prin identificare se obține

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \ldots \quad |x| < \pi$$

603. $(1+x)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

este seria binomului convergentă pentru $|x| < 1$. În cazul $\lambda \in \mathbf{N}$ se obține formula binomului.

604. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots +$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1$$

Scanned with OKEN Scanner

605. Integrînd seria precedentă se obţine:

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ cu } |x|<1.$$

606. Se integrează dezvoltarea

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

se obţine $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

Pentru $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ se obţine

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right)$$

607. Se foloseşte seria binomului,

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{x}{3} - \frac{1\cdot 2}{2!}\frac{x^2}{3^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!}\frac{x^3}{3^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!}\frac{x^4}{3^4} + \ldots |x|<1.$$

608. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{2^2}\frac{x^2}{3^2} - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3!}\frac{x^3}{3^3} + \ldots,\ |x|<1.$

609. $f'(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

iar $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \frac{x^8}{7\cdot 8} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} + \ldots$

610. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ unde înlocuind pe $\ln(1+x)$ prin seria corespunzătoare, rezultă

$$e^{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots} = e\cdot e^u$$

unde

$$u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots$$

însă

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots,$$

înlocuin u şi ordonînd se obţine

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + \ldots\right.$$

611. $\frac{(x+2)(1-x)}{(x^2+x+1)(1-x)} = \frac{2-x-x^2}{1-x^3} = (2-x-x^2)\left(\sum_0 x^{3p}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci

$$\frac{x+2}{x^2+x+1}=\sum_0^\infty a_n x^n,\ \text{cu}\ a_n=2\ \text{pentru}\ n=3p\ \text{şi}\ a_n=-1,$$

pentru $n=3p\pm 1$, $|x|<1$.

612. $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. **613.** $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|<1)$

614. $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$. **615.** $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{A}{x-e^{i\alpha}}+\frac{B}{x-e^{-i\alpha}}$

unde $e^{i\alpha}$ şi $e^{-i\alpha}$ sînt rădăcinile numitorului.

Rezultă $A=-\frac{1}{2}e^{i\alpha}$, $B=-\frac{1}{2}e^{-i\alpha}$ şi deci

$$\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\alpha}}{x-e^{i\alpha}}+\frac{e^{-i\alpha}}{x-e^{-i\alpha}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-xe^{i\alpha}}+\frac{1}{1-xe^{-i\alpha}}\right]$$

Presupunînd $|x|<1$ avem

$$\frac{1}{1-xe^{i\alpha}}=1+xe^{i\alpha}+x^2e^{2i\alpha}+\ldots+x^ne^{ni\alpha}+\ldots$$

$$\frac{1}{1-xe^{-i\alpha}}=1+xe^{-i}+x^2e^{-2i}+\ldots+x^ne^{-ni}+\ldots$$

Deci se obţine dezvoltarea

$$1+x\cos\alpha+x^2\cos 2\alpha+\ldots+x^n\cos n\alpha+\ldots,\ |x|<1$$

616. Se procedează ca la exemplul precedent

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=1+2x\cos\alpha+2x^2\cos 2\alpha+\ldots+2x^n\cos n\alpha+\ldots$$

617. Acelaşi procedeu ca la 615

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_1^\infty x^n\cos n\alpha.$$

618. $\frac{1-x\operatorname{ch}x}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}=\sum_0^\infty x^n\operatorname{ch}na.$

619. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\left(x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\operatorname{arctg}x.$

$|x|<1$

620. $\arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}=2\left(\pi-x+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}+\ldots\right).$

$|x|<1.$

Scanned with OKEN Scanner

621. $y + z = e^{x(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)}$, deci

$$y + z = 1 + \frac{x}{1!}(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a) + \frac{x^2}{2!}(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{x^n}{n!}(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)^n + \ldots \text{ sau}$$

$$(1)\quad y + z = 1 + \frac{x}{1!}(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a) + \frac{x^2}{2!}(\mathrm{ch}\,2a + \mathrm{sh}\,2a) + \ldots +$$

$$+ \frac{x^n}{n!}(\mathrm{ch}\,na + \mathrm{sh}\,na) + \ldots$$

dacă se schimbă a în $-a$, z schimbă semnul, deci

$$(2)\quad y - z = 1 + \frac{x}{1}(\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a) + \frac{x^2}{2!}(\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{sh}\,2a) + \ldots +$$

$$+ \frac{x^n}{n!}(\mathrm{ch}\,na - \mathrm{sh}\,na) + \ldots$$

de unde prin adunare și scădere a egalităților (1) și (2) se obține:

$$y = 1 + \frac{x}{1!}\mathrm{ch}\,a + \frac{x^2}{2!}\mathrm{ch}\,2a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\mathrm{ch}\,na + \ldots +$$

$$z = x\,\mathrm{sh}\,a + \frac{x^2}{2!}\mathrm{sh}\,2a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\mathrm{sh}\,na + \ldots$$

622. $y + iz = e^{x(\cos\theta + i\sin\theta)}$ de unde

$$y + iz = 1 + \frac{x}{1!}(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{x^2}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots +$$

$$+ \frac{x^n}{n!}(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \ldots$$

deci

$$y = 1 + x\cos\theta + \frac{x^2}{2!}\cos 2\theta + \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos n\theta + \ldots$$

$$z = x\sin\theta + \frac{x^2}{2!}\sin 2\theta + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin n\theta + \ldots$$

623. $y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix}) + = \frac{1}{4}[e^{x(1+i)} + e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)} +$
$+ e^{-x(1-i)}]$.

Termenul general al dezvoltării este

$$\frac{x^n}{4 \cdot n!}[(1 + (-1)^n)(1 + i)^n + (1 - i)^n]$$

care este nul pentru n impar. Punînd $n = 2p$ $a_{2p} = \frac{2^p}{(2p)!}\cos p\frac{\pi}{2}$.

Dacă p este impar coeficientul $a_{2p} = 0$ iar dacă $p = 2q$

$$a_{4q} = \frac{4^q}{(4q)!}\cos q\pi = (-1)^q\frac{4^q}{(4q)!}$$

Decim

$$y = 1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 + \ldots + (-1)^q\frac{4^q}{(4q)!}x^{4q} + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Analog se pot obține dezvoltările pentru ch x sin x, sh x cos x și sh x sin x.

624. $\dfrac{x^n}{n(n+1)} = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)x^n$; $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} - \sum_1^\infty \frac{x^n}{n+1}$

Cum $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1$$

iar $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_1^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}[-\ln(1-x) - x]$

deci

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1.$$

625. Se poate folosi metoda precedentă. Vom folosi metoda derivării. Fie

$$S(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)};\ x\,S(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$[x\,S(x)]' = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+2)(n+3)};\ [x^2(x\,S(x))']' = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+3}.$$

Multiplicînd iar cu x^2 se obține în dreapta o serie cunoscută.
Se deduce

$$[x^2(x\,S(x)')]' = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\ln(1-x).$$

Făcînd operația invers și remarcînd ca $S(0) = \dfrac{1}{6}$. Se obține:

$$S(x) = \frac{3x-2}{4x^2} - \frac{(1-x)^2}{2x^3}\ln(1-x),\ |x| < 1$$

626. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\sum_1^\infty \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+m}\right)$ însă

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x} \text{ iar } \sum_1^\infty \frac{x^{n+m}}{n+m} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m}\right),$$

deci

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+m)} = \frac{(1-x^m)\ln(1-x)}{mx^m} + \frac{1}{mx^m}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m}\right);\ |x| \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

627. Derivînd dezvoltarea $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$ se obţine $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum^\infty nx^{n-1}$.

Înmulţind cu x şi derivînd rezultă $\sum_1^\infty (n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$.

628. Din seria $x(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot x^n + \ldots) = \frac{x}{1+x}$ derivînd, înmulţind cu x şi iarăşi derivînd rezultă

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \cdot n^2 x^n = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

629. Fire $f(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{2n(2n+1)(2n+2)}$ serie convergentă pentru $|x| \leqslant 1$. Se obţine $f''(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Integrînd

$$f''(x) = \ln \sqrt{1+x^2} + c\,; \quad \to C = 0$$

$$f'(x) = x \ln \sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{arctg} x + C_1\,; \quad \to C_1 = 0$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln \sqrt{1+x^2} - \frac{3x^2}{4} + x \operatorname{arctg} x.$$

Seria numerică are suma $f(1) = \frac{1}{4}(\pi - 3)$.

630. Se consideră seria $f(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$ convergentă pentru $-1 < x \leqslant 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^3} \to f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C = 0 \to C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$$

deci suma S a seriei va fi $f(1)$.

$$S = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

631. Se consideră $f(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$; $-1 < x \leqslant 1$. Se derivează şi se deduce

$$f(x) = \int \frac{x^3 dx}{1+x^4} \quad \text{vezi exerciţiul 135.}$$

$$S = f(1) = \frac{\pi - \ln(2+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

632. Raza de convergenţă este 1.

$$f'(x) = \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{4} + \frac{3x^3}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{nx^n}{n+2} + \ldots$$

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{1}{3} - \frac{2}{4}x + \frac{3}{5}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}x^{n-1} + \ldots$$

$$\int \frac{f'(x)}{x}\,dx = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2} + \ldots$$

Cum $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots$ rezultă

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} = x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \ldots\right)$$

Înlocuind paranteza cu $\int \frac{f'(x)}{x}\,dx$ se obţine

$$\int \frac{f'(x)}{x}\,dx = \frac{1}{x^2}\left[\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right]$$

Derivînd egalitatea obţinem

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2}\ln(1+x) \text{ de unde}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(1+x) - 2.$$

633. Se descompune coeficientul lui x^n în elemente simple:

$$\frac{1+2n+2n^2}{1+3n+2n^2} = 1 - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+2n}.$$

Se descompune seria în trei serii ale căror sume se calculează uşor. Se deduce

$$S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\operatorname{arg\,th}\sqrt{\varepsilon x}}{\sqrt{\varepsilon x}} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

şi de acelaşi semn cu x) $|x| < 1$.

634. $S(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\ln(1-x)$

635. Suma S este egală cu suma seriei

$$S(x) = \frac{1}{1\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 5}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

pentru $x = \frac{1}{2}$. Se calculează suma utilizînd metodele precedente

$$S(x) = \frac{x^2}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x\right)$$

$$S = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\ln 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

636. Coeficientul lui x^{n-1} se scrie

$$\frac{(n+1)^3}{n(n+2)} = (n+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right).$$ Se deduce

$$S(x) = \frac{2-x}{(1-x)^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x} - \frac{(1+x)^2 \ln(1-x)}{2x^3}$$

637. $e^{-x^3} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots$

deci

$$\int_0^1 e^{-x^3}\,dx = 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \ldots + \ldots$$

Luînd pentru primii 5 termeni eroarea este mai mică decît $\frac{1}{11 \cdot 5!} < 0{,}001$

deci $\int_0^1 e^{-x^3}\,dx \simeq 0{,}747.$

638. Se dezvoltă $\cos\sqrt{x}$ şi se obţine 0,764.

639. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{24} - \frac{1}{208} + \ldots$

luînd primii 4 termeni eroarea este mai mică decît o miime. Se obţine 0,927.

(S-a dezvoltat $(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ în serie).

640. 8,041.

641. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - + \ldots$

luînd 4 termeni rezultă $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx \simeq 1{,}605.$

642. Fie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ elipsa a cărei reprezentare parametrică este $x = a \cos t$ $y = b \sin t$, arcul s de la $A(a, 0)$ la $M(x, y)$ va fi

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\,dt.$$

Integrala este eliptică, o vom calcula folosind dezvoltarea în serie de puteri :

$$(1 - e^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2 \cos^2 t}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} e^4 \cos^4 t - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} e^6 \cos^6 t - \ldots -$$

$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} e^{2n} \cos^{2n} t - \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține termenul general al seriei vom calcula $\int \cos^{2n} t\, dt$. Vom lua pentru un sfert de elipsă adică $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\, dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\ \frac{\pi}{2}$$

Coeficientul lui e^{2n} este $-\frac{a\pi}{2}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2(2n-1)$ deci

$$(1)\quad \frac{l}{4} = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot e^2 - \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 3e^4 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 5e^6 - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2\cdot 7e^8 - \ldots\right]$$

Raza unui cerc care are aceiași lungime cu elipsa este $R = \frac{l}{2\pi}$.

Înlocuind R cu valoarea sa și calculînd coeficienții numerici, rezultă:

$$R = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16\,384}e^8 - \ldots\right)$$

Să dezvoltăm în serie după puterile excentricității pe

$$\frac{a+b}{2} = a\frac{1+\frac{b}{a}}{2} = a\,\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} =$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{4}{64}e^4 - \frac{8}{256}e^6 - \frac{320}{16\,384}e^8 - \ldots\right)$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2\frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = a\sqrt{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} = a\sqrt[4]{1-e^2} =$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{6}{64}e^4 - \frac{14}{256}e^6 - \frac{616}{16\cdot 384}e^8 - \ldots\right)$$

Rezultă

$$\pi\left[3\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right] = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{172}{16\cdot 384}e^8 - \ldots\right]$$

Comparînd cu lungimea dată de (1) se constată că eroarea, dacă luăm 5 termeni este $\frac{3}{16\,384}e^8$, destul de mică. În cazul Pământului este foarte mică căci $e^2 = 0{,}00667$.

643. $S(x) = 1 + 2x + \ldots + (n+1)x^n$; $\int_0^x S(x)dx = x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = x\,\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Derivînd obținem pe $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+2)x^{n+1}}{1-x} - \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}$. Această expresie permite de a discuta direct convergența pentru toate valorile lui x. Revine la a studia pentru $n \to \infty$ limita $(n+2)(1-x)^{n+1} + x^{n+2}$ sau $x^{n+1}[(n+2) + (n+1)x]$. Pentru $|x| > 1$ această cantitate tinde la infinit; pentru $|x| < 1$ ele tind către zero. Avem deci $R = 1$. Suma $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ de unde restul de ordinul n, $R_n(x) = \frac{(n+2)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

644. $R = 1$. Ipoteza asupra coeficienților arată că la orice ε, se poate asocia un întreg $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon.$$

În ipoteza $0 < x < 1$ inegalitățile precedente permit de a majora și minora restul $R_N = \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n$, avem

$$\sum_{N+1}^{\infty} (l - \varepsilon)x^n < R_N(x) < \sum_{N+1}^{\infty} (l + \varepsilon)x^n, \text{ sau}$$

$$\frac{(l-\varepsilon)x^{N+1}}{1-x} < R_N(x) < \frac{(l+\varepsilon)x^{N+1}}{1-x}$$

645. Fie n fix. Avem $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ de unde

$$\frac{S(x)}{R_n(x)} = 1 + \frac{S_n(x)}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sum_{0}^{\infty} a_{p+n+1}x^p}$$

Cînd $x \to \infty$ suma $\sum_{0}^{\infty} a_{p+n+1}x^n \to \infty$ deci inversa către zero de asemenea $\frac{S_n(x)}{x^{n+1}} \to 0$. Prin urmare $\frac{S(x)}{R_n(x)} \to 1$.

646. Pentru x dat astfel ca $0 \leqslant x < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Pentru $x = 1$ limita este 1. Funcția f este deci nulă pentru $x \in [0, 1]$ și egală cu 1 pentru $x = 1$. Ea nu este continuă pentru $x = 1$.

647. Se verifică că orice funcție f_n este continuă pe $[0, 1[$ căci $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ pentru una sau alta din definiții. Fie $x \in [0, 1]$. Pentru n destul de mare avem $\frac{1}{n} < x$ de unde $f_n(x) = 1 - x$. Limita lui $f_n(x) = 1 - x$. Pentru $x = 0$ avem $f_n(0) = 0$. Există convergență simplă, funcția limită f fiind definită prin

$$f(0) = 0 \text{ și } f(x) = 1 - x \ (0 < x \leqslant 1).$$

Se vede că f nu este continuă pentru $x = 0$.

648. Se poate reprezenta grafic $f_n(x)$. Curba este formată din trei segmente. Pentru $x = 0$ $f_n(0) = 0$ iar pentru $x \neq 0$ se poate găsi un n_1 astfel ca $\frac{1}{n_1} < x$. Dacă $n > n_1$ avem de asemenea $f_n(x) = 0$

$\int_0^1 f_n(x)dx$ este aria triunghiului OAB și este $\frac{1}{4}$. Pe de altă parte $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Cele două expresii nu sînt egale.

649. Funcția limită $f = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Deci și $f' = 0$ iar $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$. Se obține $f_n'(x) = e^{-nx^2} - 2nx^2e^{-nx^2}$ care este nulă pentru orice $x \neq 0$. Pentru $x = 0$ avem $f_n'(0) = 1$ deci limita e 1. Egalitatea nu are loc pe tot R.

Scanned with OKEN Scanner

650. Pe $[0, a]$ limita este nulă. Avem deci $\forall\, x,\ x \in [0, a]\ |x^n| \leqslant a^n,\ a^n \to 0$ ceea ce stabileşte convergenţa uniformă. Pe $[0, 1]$ limita este nulă, afară de $x = 1$. Avem $0 \leqslant x < 1\ |f_n(x) - f(x)| = x^n$ şi $x = 1\ |f_n(1) - f(1)| = 0$. Prin urmare $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$. Marginea superioară nu e atinsă pentru nici un x. Ea nu tinde către 0 cu $\frac{1}{n}$, convergenţa nu este uniformă.

651. $$f_n(0) - f(0) = 0 \text{ pentru } x = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |(n-1)x - (1-x)| = |nx - 1| = 1 - nx$$

pentru $0 < x \leqslant \frac{1}{n}$; prin urmare

$$|f_n(x) - f(0)| = 0 \text{ pentru } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1.$$

Marginea superioară se obţine considerînd a doua expresie; dacă

$$x \to 0,\ 1 - nx \to 1 \text{ cu } n \text{ fix, deci}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

Convergenţa nu este uniformă.

652. Graficul arată că

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{2}$$

Limita $\to \infty$ ceea ce exclude convergenţa uniformă.

653. Pentru că $f_n - f$ este derivabilă şi continuă pe $\mathbf{R}$, se studiază variaţia sa. Derivata se anulează pentru $x_n^2 = \frac{1}{2n}$ de unde

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

care tinde la zero cînd $n \to \infty$ deci convergenţa este uniformă.
Şirul f_n' definit prin $f_n'(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2}$ converge către funcţia f_1 astfel că $f_1(0) = 1$ şi $f_1(x) = 0$ pentru $x = 0$. Avem

$$f_n'(x) - f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x = 0 \\ (1 - 2nx^2)e^{-nx^2} \text{ pentru } x \neq 0. \end{cases}$$

Rezultă $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n'(x) - f_1(x)| = 1$. Convergenţa nu este uniformă.

654. Fie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ şi $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$

Avem $|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{f_n(x)}{1 + f_n^2(x)} - \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}\right| =$

$$= |f_n(x) - f(x)| \cdot \left|\frac{1 - f_n(x)f(x)}{[1 + f_n^2(x)][1 + f^2(x)]}\right|$$

Însă

$$\left|\frac{1 - f_n(x)\cdot f(x)}{[1 + f_n^2(x)][1 + f^2(x)]}\right| \leqslant \frac{1}{[1 + f_n^2(x)][1 + f^2(x)]} + \frac{|f_n(x)\cdot f(x)|}{[1 + f_n^2(x)]\cdot[1 + f^2(x)]}$$

Scanned with OKEN Scanner

În ultima expresie primul termen este inferior lui 1 iar a doua lui $\frac{1}{4}$ căci $\frac{u}{1+u^2} < \frac{1}{2}$ pentru $u > 0$. Deci $|g_n(x) - g(x)| < \frac{5}{4}. |f_n(x) - f(x)|$ de unde convergența uniformă a șirului $g_n(x)$.

655. Obținem $f_n(x) = \frac{1 - e^{n(x-a)}}{1 - e^{-na}}$. Pentru $0 \leqslant x < a$ limita lui $f_n(x)$ este 1. Să studiem convergența uniformă pe $[0, a[$. Avem cu $f(x) = 1$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{e^{-na} - e^{n(x-a)}}{1 - e^{-na}} \right|$$

Dacă $x \to a$ cu $x < a$, $|f_n(x) - f(x)|$ tinde către 1, de unde $\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = 1$. (De remarcat că funcția studiată este continuă dar că domeniul de definiție nu este închis. Marginea superioară nu este atinsă într-un punct al domeniului). Convergența nu e uniformă. Dacă ne restrîngem la $[0, a']$ cu $a' < a$ avem uniform

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{e^{-na} + e^{n(a'-a)}}{1 - e^{-na}}$$

care tinde la zero pentru n infinit. Convergența este uniformă.

656. $f(x) = 0$. f_n este continuă pe [0 1], valorile sale admit o margine superioară atinsă pentru $x = \frac{n}{n+1}$. Avem $f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ a cărei limită este $\frac{1}{e}$, deci convergența nu e uniformă pe [0, 1]. Egalitatea este satisfăcută căci cei doi membri sînt nuli.

657. Pentru $x \geqslant 0$ $f(x) = e^x$. Să studiem

$$|f_n(x) - e^x| = \frac{x(e^x - e^{-x})}{n + x} < \frac{xe^n}{n} < \frac{e}{n} \text{ pe } [0, 1]$$

deci convergența e uniformă.

$$\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3.$$

658. a) $\int_a^b f_n(t)dt = \frac{1}{\pi}$ (arctg nb — arctg na). Dacă $a > 0$, $b > 0$, cînd $n \to \infty$ $\int_a^b f_n(t)dt = 0$. Concluzia este aceeași pentru $a < 0$, $b < 0$. Dacă $a < 0 < b$ limita este 1.

b) Pentru $x \neq 0$ $\lim f_n(x) = 0$. Pe $[c, +\infty[$ avem uniform $\frac{1}{\pi}\left|\frac{n}{n^2x^2 + 1}\right| < \frac{1}{n\pi c^2}$ ceea ce arată convergența uniformă către $f = 0$. Același rezultat pe $]-\infty, -c]$.

659. Este seria geometrică cu rație $1 - x$ și dacă $x \neq 0$ avem

$$S_n(x) = x \frac{1 - (1 - x)^{n+1}}{1 - (1 - x)} = 1 - (1 - x)^{n+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x \in [0, 2[$ limita $S(x) = 1$. Dacă $x = 0$ $S_n(0) = 0$ de unde $S(0) = 0$. Domeniul A este $0 \leqslant x < 2$. Funcţiile $u_n(x)$ sînt continue pe A dar S nu este.

660. $S_n(x) = \sum_1^n u_k(x) = \text{th}\, nx$. Limita este 1 pentru $x > 0$. 0 pentru $x = 0$ şi -1 pentru $x < 0$. Funcţia S nu este continuă pentru $x = 0$.

661. $S_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n - (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})$. Pentru $n \neq 1$ avem

$$S_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{x^2 - x^{2n+2}}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} - \frac{x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{2n+2}}{1 - x^2}.$$

Pentru $|x| < 1$ seria este simplu convergentă şi $S(x) = \frac{x}{1 - x^2}$.

Pentru $x = \pm 1$ avem

$$x = 1\,;\ u_n(1) = 0 \text{ de unde } S(1) = 0$$

$$x = -1\,;\ u_n(-1) = (-1)^n[1 - (1 - x)^n].$$

Seria este divergentă căci $u_{2p+1} = -2$.

Pentru $|x| > 1$ seria este divergentă. Domeniul de convergenţă este deci $A =]-1, 1[$. Funcţiile $u_n(x)$ sînt continue pe A dar S nu este pentru $x = 1$, căci $S \to \infty$ cînd $x \to 1$.

662. Cele trei serii sînt uniform convergente căci $|u_n(x)| < \frac{1}{n^2}$.

663. $0 < x < 2$ avem $|S(x) - S_n(x)| = |1 - x|^{n+1}$ (vezi 104). Marginea superioară este 1, ea nu tinde către zero deci nu este uniform convergentă. Pentru $a \leqslant x \leqslant b$ avem

$$\sup_{x \in [a, b]} |1 - x|^n = k^n \text{ cu } k = \sup \{|1 - a|, |1 - b|\}$$

pentru $k < 1$ convergenţa este uniformă.

664. Se foloseşte dezvoltarea în serie a lui e^u unde se înlocuieşte u prin $\frac{1}{x^2}$.

Pentru $x \neq 0$ avem

$$\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n!\, x^{2n - \frac{1}{2}}}$$

Presupunînd $x \geqslant 1$ avem uniform

$$\frac{1}{n!\, x^{2n - \frac{1}{2}}} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Seria considerată este uniform convergentă pentru $x \geqslant 1$ deci putem integra termen cu termen,

$$I = \sum_1^\infty \frac{1}{\left(2n - \frac{3}{2}\right) n!}$$

Scanned with OKEN Scanner

665. Pentru x oarecare, avem

$$x^\alpha e^{-x} = x^\alpha - \frac{x^{\alpha+1}}{1!} + \frac{x^{\alpha+2}}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{\alpha+1}}{n!} + \ldots$$

Să presupunem $x \in [0, 1]$, cum $\left|(-1)^n \frac{x^{\alpha+n}}{n!}\right| < \frac{1}{n!}$ seria este uniform convergentă, putem deci integra termen cu termen, ceea ce dă

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!\,(n+\alpha+1)} + \ldots$$

pentru $\alpha > 0$ avem

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n!(n+\alpha+1)}\right| < \frac{1}{n!}$$

deci seria este uniform convergentă pe mulțimea realelor pozitive.

666. Seria este convergentă pentru $x > 0$; $u_n'(x) = -n^2 e^{-n^2 x}$. Pentru $x \geqslant \alpha$ cu $\alpha > 0$ avem $n^2 e^{-n^2 x} \leqslant n^2 e^{-n^2 \alpha}$ și cum seria $n^2 e^{-n^2 \alpha}$ este convergentă (d'Alembert) deci putem aplica teorema asupra derivării. Dacă $S(x)$ este suma seriei date avem

$$S'(x) = -\sum_0^\infty n^2 e^{-n^2 x}$$

valabil pentru x pozitiv oarecare. Se obține de asemenea:

$$S_{(x)}^{(k)} = (-1)^k \sum_0^\infty n^{2k} e^{-n^2 x}$$

667. $u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}$ este uniform convergentă pentru $x \geqslant 0$. Pentru $x < 0$ seria este divergentă. Pentru a studia seria $v_n(x)$ este comod a pune $e^{-x} = t$ de unde seria întreagă $\frac{t^n}{n}$ cu raza de convergență 1 și divergentă pentru $t = 1$. Ea este uniform convergentă pentru $|t| \leqslant a$ cu $a < 1$. Seria $v_n(x)$ este deci convergentă pentru $x > 0$, uniform convergentă pentru $x \geqslant \alpha$ cu $\alpha > 0$. Se observă că $u_n'(x) = -v_n(x)$. Se poate aplica teorema asupra derivării pentru $x \geqslant \alpha$ $(\alpha > 0)$. Sumele S și $S_1(x)$ sînt astfel că

$$S'(x) = -S_1(x) \text{ valabilă pentru } x > 0.\text{„}$$

668. Seria este alternantă căci $u_n(x) > 0$.

$$|S(x) - S_n(x)| < u_{n+1}(x) \text{ deci } |S(x) - S_n(x)| < a_{n+1}$$

cum șirul $a_n \to 0$ seria este uniform convergentă.

669. $|u_n(x)| < \frac{a^2}{n^3}$ seria e uniform convergentă. Să arătăm că nu putem extinde această proprietate la $\mathbf{R}_+$ în întregime. Studiem $R_n(x) = S(x) - S'(x) = \sum_{n+1}^\infty \frac{kx}{k^3 + x^3}$ alegînd convenabil x și n. Dacă p este întreg arbitrar se ia $n = p$ și $x = 2p$. Avem

$$R_p = \sum_{p+1}^\infty \frac{kx^2}{k^3 + x^3} > \sum_{p+1}^{2p} \frac{kx^2}{k^3 + x^3} = \sum_{p+1}^{2p} \frac{4kp^2}{k^3 + 8p^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $p+1<k<2p$ fiecare termen al sumei este superior lui $\frac{1}{4}$, căci

$$\frac{4kp^3}{k^3+8p^3} > \frac{4p^3}{16p^3} = \frac{1}{4}, \text{ deci } R_p > \frac{p}{4}$$

cum p este arbitrar este imposibil de a majora pe R_p pe $\mathbf{R}_+$ uniform. Seria nu este deci uniform convergentă pe $\mathbf{R}_+$. Calculul precedent arată că $\lim_{x\to\infty} S(x) = \infty$. Pentru că fiecare $u_n(x) \to 0$ cînd $x \Rightarrow \infty$, avem

$$\sum_0^\infty \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0.$$

Cele două limite sînt diferite.

670. a) Seria este divergentă pentru $x = 0$, iar pentru $|x| > a$ $(a > 0)$ este normal convergentă.

$$|u_n(x)| < \frac{1}{1+n^2a^2} < \frac{1}{n^2a^2}$$

b) Convergenta este uniformă pentru $x > a$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \sum_1^\infty \lim_{x\to\infty} u_n(x) = 0$$

Pentru a preciza studiem seria $\frac{x^2}{1+n^2x^2}$ de sumă $x^2S(x)$

$$\frac{x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n \geqslant 1)$$

arată că este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$. Avem deci

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ S(x) = \sum_1^\infty \lim \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = A$$

Deci suma $S(x)$ este echivalentă cu $\frac{A}{x^2}$ pentru x infinit

c) $$\frac{x}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt < \frac{x}{1+n^2x^2}$$

însumînd inegalitățile pentru $n = 0$ pînă la ∞ se obține

$$x\ S(x) \leqslant \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt \leqslant x + xS(x)$$

Integrala fiind $\frac{\pi}{2}$ se deduce

$$\frac{\pi}{2} - x \leqslant xS(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Limita lui $x\ S(x) = \frac{\pi}{2}$ cînd $x \to 0$ (cu $x > 0$).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

INTEGRALE CURBILINII

671. $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ deci

$$\int_c ye^{-x}ds = \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t)e^{-\ln(1+t^2)}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2\operatorname{arctg} t - t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{16} - \ln\sqrt{2}.$$

672. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$ deci

$$\int_c xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \frac{ab}{3}\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

673. $ds = \sqrt{x'^2 + y^2 + z'^2}\,dt = (1+t)dt$ deci $\int_c xyz\,ds = \frac{16\sqrt{2}}{143}$

674. Punctele A și B se află pe bisectoarea $y = x$,

$$ds = \sqrt{1+1}\,dx = \sqrt{2}\,dx.$$

$$\int_c (x^2+y^2)ds = \int_a^b 2x^2\sqrt{2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3 - a^3).$$

675. $\int_c = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$

Pe OA avem $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{3}}$.

$$\int_{OA} x\,dy - y\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}\,dx = 0.$$

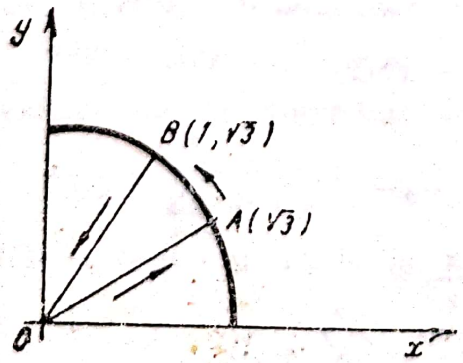

Fig. X.

Pe arcul AB avem $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ deci

$$\int_{AB} x\,dy - y\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\,dt = \frac{2\pi}{3}$$ iar pe BO integrala este nulă.

Rezultatul obținut este dublul ariei sectorului circular OAB, cum era de așteptat.

Scanned with OKEN Scanner

676. $\int_{c^+} = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$.

Pe OA, $y = \frac{x}{2}$ deci

$$\int_{OA} (x + y)dx - y\,dy = \int_0^2 \frac{5x}{4}\,dx = \frac{5}{8}.$$

Pe AB, $y = \frac{2}{x}$, $dy = -\frac{2}{x^2}\,dx$ deci

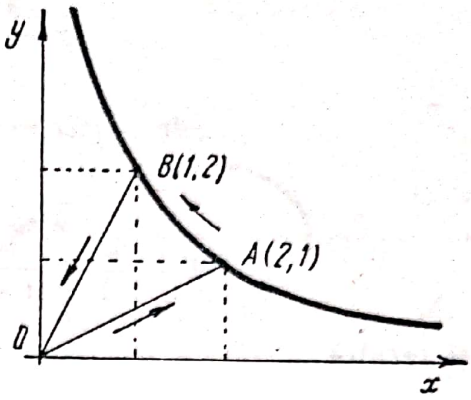

Fig. 11.

$$\int_{AB} (x + y)dx - y\,dy = \int_2^1 \left(x + \frac{2}{x}\right)dx + \frac{4}{x^3}dx = -3 - 2\ln 2.$$

Pe BO, $y = 2x$ deci $\int_{BO} (x + y)dx - y\,dy = \int_1^0 -x\,dx = \frac{1}{2}$

Rezultă

$$\int_{c^+} = \frac{5}{8} - 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2} = -\frac{15}{8} - 2\ln 2.$$

677. $\int_c (2a - y)dx + x dy = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t\,dt = -2\pi a^2$.

678. $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$. $t \in [0, \pi]$

$$\int_{c^+} \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}\,dy = -\int_0^{\pi} (1 + \sqrt{2(1 + \cos t)}\,dt = -(\pi + 4)$$

679. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci

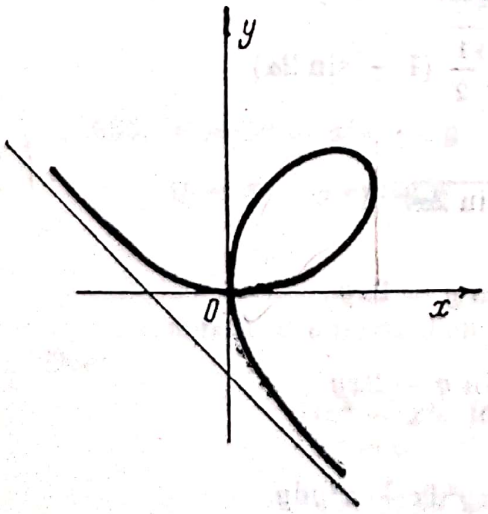

Fig. 12.

$$\int_{c^+} \frac{dy}{x + 3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t}{3(1 + \cos t)}\,dt =$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \cos t}\right)dt = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

680. $A = \frac{1}{2}\int_{c^+} (x dy - y dx)$.

Curba este o cubică cu punct dublu în origină, admite deci o reprezentare parametrică rațională. Se intersectează cu $y = tx$ și se obține

Scanned with OKEN Scanner

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

$$xdy - ydx = 9a^2 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt, \quad t \in [0, \infty[.$$

deci

$$A = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2dt}{(1+t^3)^2} \text{ în care se face } 1 + t^3 = u$$

și rezultă

$$A = \frac{3a^2}{2}.$$

681. $\int\limits_{OABO} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

Pe OA avem $y = 0$, $dy = 0$, deci

$$\int\limits_{OA} = \int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

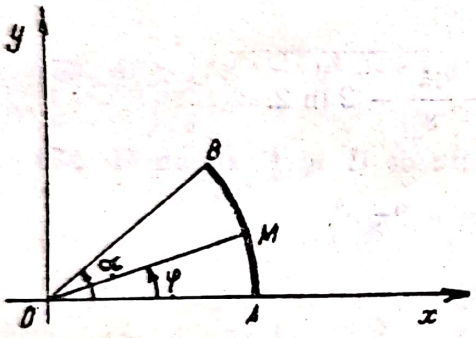

Fig. 13.

Ecuațiile arcului AB sînt $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$. $\varphi \in [0, \alpha]$. Rezultă

$$\int\limits_{AB} = -2\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$-\int_0^\alpha \frac{1+\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}\sin 2\varphi\,d\varphi = -\int_0^\alpha \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}d\varphi -$$

$$-\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} + \int_0^\alpha \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\ln\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Pe BO avem $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $x \in [\cos\alpha, 0]$ deci

$$\int\limits_{BO} = \int\limits_{\cos\alpha}^0 (1+\operatorname{tg}\alpha)^2 x\,dx = -\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)$$

Rezultă

$$\int\limits_{OABO} = \ln\sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

682. $P = e^x\cos y + xy^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x\sin y + 2xy$

$$Q = -e^x\sin y - x^2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x\sin y - 2xy$$

deci

$$\int_{c^+} e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy + \int_{c^+} xy^2dx - x^2ydy.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima integrală este nulă, conturul fiind închis și expresia de integrat fiind o diferențială totală.

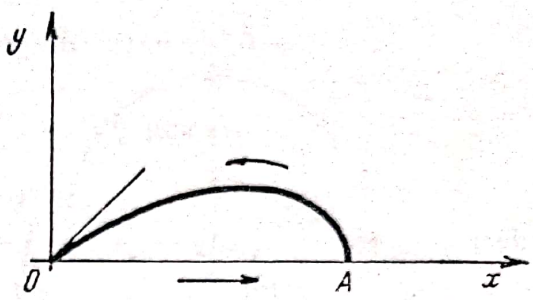

Fig. 14.

$$\int_{c^+} = \int_{OA} + \int_{ABO}$$

Pe OA, $y = 0$, $dy = 0$ deci

$$\int_{OA} xy^2dx - x^2ydy = 0$$

Pe arcul ABO $\quad x = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}$

$$y = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$$

$$dx = -\frac{a\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta, \quad dy = \frac{a\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$xy^2dx - x^2ydy = -\frac{a^4}{2}\cos^2 2\theta\sin 2\theta\,d\theta$$

deci

$$\int_{ABO} = -\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,\sin 2\theta\,d\theta = \frac{a^4}{4}\left|\frac{\cos^3 2\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{a^4}{12}$$

683. $\alpha)\ \frac{\pi a^3}{4}$; $\beta)\ 0$; $\gamma)\ 4\pi ab(a-b)$.

684. $x = a\cos^3 t$

$y = a\sin^3 t$

$$x^2dy - y^2dx = 3a^3(\cos^5 t + \sin^5 t)\cos^2 t\sin^2 t\,dt$$

Se obține

$$\frac{3a^{4/3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = \frac{3\pi a^{\frac{4}{3}}}{16}.$$

685. $P = x^4 - x^3e^x - y$

$Q = x - y\,\text{arctg}\,y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Se remarcă că o parte a elementului diferențial este o diferențială totală. Deci

$\int_\Gamma (x^4 - x^3e^x)dx - y\,\text{arc tg}\,ydy = 0$ și rămîne

$\int_\Gamma xdy - ydx$. Dar $\int_\Gamma = \int_{AD} + \int_{DB} + \int_{BA}$.

Scanned with OKEN Scanner

$\int_{AD} = 0$. Ecuația dreptei BD este $x + 2y + 1 = 0$

$$\text{sau } y = -\frac{1}{2}(x+1),\ dy = -\frac{dx}{2}$$

deci $$\int_{BD} x\,dy - y\,dx = \int_{-1}^{1} -\frac{x\,dx}{2} + \frac{1}{2}(x+1)\,dx = 1$$

Pe arcul BA avem $x = 1 + \cos t,\ y = \sin t.$

$$\int_{BA} x\,dy - y\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\cos t)\cos t\,dt + \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2} + 1$$

de unde $\int_{\Gamma} = 2 + \frac{\pi}{2}$. (Integrala reprezintă dublul ariei limitată de curba Γ).

686. Circulația cîmpului F pe C este dată de

$$\int_C \bar{F}\,d\bar{r} \text{ unde } \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} = z\bar{k}$$

deci $\int_C \bar{F}\,d\bar{r} = \int_{M_0M} (x + 2y + 3z)dx + (2x + 3y + z)dy + (3x + y + 2z)dz.$

Ecuațiile dreptei M_0M sînt

$$x = x$$
$$y = x + 1$$
$$z = x + 2$$

Rezultă $\int_0^{-1} (18x + 18)dx = -9.$

687. Curba C este cardioida

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ deci calculăm}$$

$\int_{AB} \frac{3x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{3y^3 + x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$, adică pe dreapta $\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1$ etc.

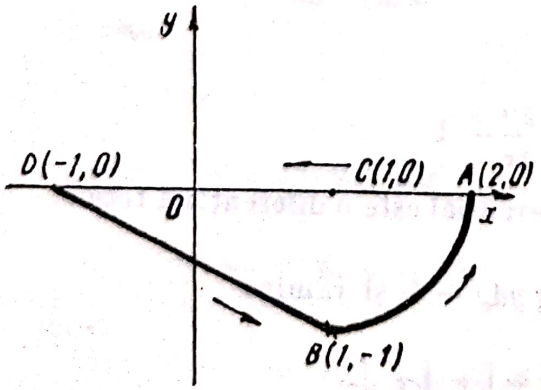

Fig 15.

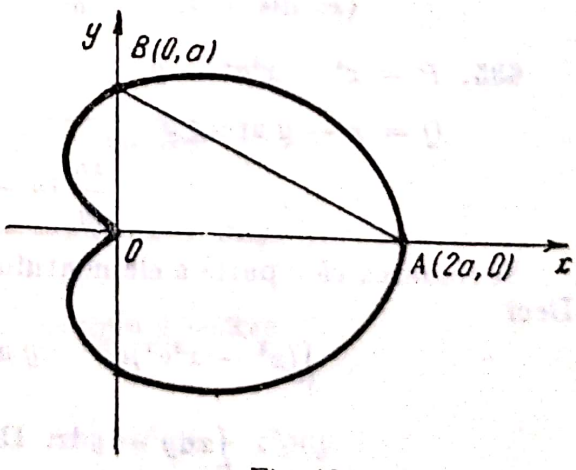

Fig. 16.

Scanned with OKEN Scanner

688. Circulația este

$$\int_\Gamma [3a(x^2+y^2)-y^3]dx+3xy(2a-y)dy$$

cum $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ integrala precedentă este independentă de drum, ea se poate reduce la calculul pe BA a cărei ecuație este $y=a$, deci

$$\int_\Gamma = \int_{BA} [3a(x^2+y^2)-y^3]dx = \int_a^{-a}$$

$$3a[(x^2+a^2)-a^3]dx = -6a^4 \to \int_{B\Gamma AB} = 0$$

conturul fiind închis.

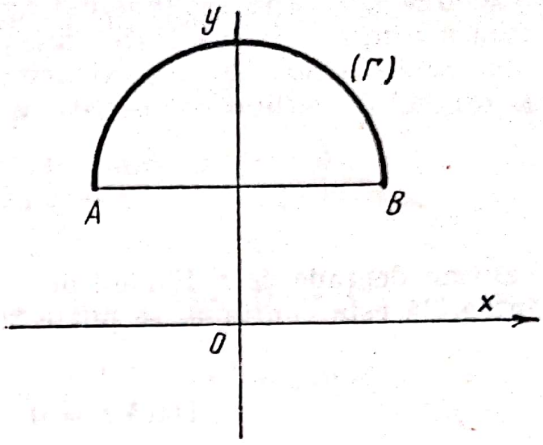

Fig. 17.

689. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. P și Q sînt funcții continue în raport cu x și y în afară de origină. $I=0$ pentru orice curbă Γ închisă care nu conține originea. Se compară

I cu $J=\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi$. Se notează $I-J=\int_\Gamma Adx-Bdy$.

Rezultă $A=\frac{e^x}{x^2+y^2}(s\sin y-y\cos x)+\frac{y}{x^2+y^2}$ și

$B=\frac{e^x}{x^2+y^2}(x\cos y+y\sin y)-\frac{x}{x^2+y^2}$. A și B sînt continui chiar în origine. Se deduce $I-J=0$ și $I\simeq J=2\pi$. Să arătăm că A este continuă. În vecinătatea originei avem

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1$$

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2}+y^2\varepsilon_2$$

$\sin y=y+y^2\varepsilon_3$ unde ε_1, ε_2, ε_3 sînt funcții care tind către zero în origină. Cu ajutorul acestor expresii se pune A sub forma

$A=\frac{y}{2}+\frac{xy}{2}+y\frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{x^2+y^2}$ unde α, β, γ sînt funcții care tind către zero odată cu x și y. Cînd x și y tind către zero primii doi termeni tind către zero, al treilea este produsul a doi factori, primul $y\to 0$ iar al doilea în coordonate polare este

$$\alpha\cos^2\theta+\beta\cos\theta\sin\theta+\gamma\sin^2\theta$$

care este mărginit; deci $A\to 0$, deci A este continuă în origină. Demonstrație analoagă pentru B.

2) $$I=\int_\Gamma e^x\cos y\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_\Gamma e^x\sin y\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

care în coordonate polare devine

$$I=\int_\Gamma e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)d\theta+\int_\Gamma e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)\frac{dr}{r}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea lui I este necunoscută apriori, dar ea nu se schimbă dacă se deformează continuu curba Γ (Se înlocuieşte Γ printr-o curbă omoloagă în domeniul dublu conex, obţinut excluzînd originea). Se ia pentru Γ cercul de rază r şi centrul 0; r fiind constant, a doua integrală este nulă şi

$$I = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta)\,d\theta$$

care nu depinde de r. Făcînd pe r să tindă către zero, funcţia de sub semnul integrală este continuă, se poate trece la limită sub semnul integrală.

$$\text{Dacă } r = 0 \qquad I = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

690. $\frac{3\pi}{2} + 1$. **691.** Curba este parabola $2ay = a - x^2$ şi integrala se calculează uşor luînd pe x ca variabilă. Integrala este convergentă pentru $\alpha < 1$.

692. Primele două integrale sînt imediate iar pentru arcul AB se face $x = \cos t$.

$y = 1 + \sin t$. Este preferabil de a observa că expresia este diferenţiala totală a funcţiei

$u = \frac{x^2 - 1}{y}$ funcţie uniformă şi continuă în domeniul considerat, rezultă $I = 0$.

693. Intersecţia sferei cu cilindru este o curbă strîmbă avînd un punct dublu în O, şi două bucle simetrice în raport cu planul $z = 0$, avem deci o curbă închisă

$$I = \int_C (x^2 + y^2)(dx + dy + dz) - \int_C x^2dx + y^2dy + z^2dz$$

a doua integrală este nulă. Ţinînd seama de ecuaţia sferei se găseşte

$$I = 4a \int_C xdx + xdy + xdz = 4\pi a^3$$

694. 1) P şi Q fiind fracţii raţionale cu numitorul nenul în D, ele sînt deci diferenţiabile. Derivatele parţiale sînt fracţii raţionale cu numitorul nenul în D sînt deci continui

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-3y^4 + 2x^2y^2 - 3x^4}{x^2y^2}.$$

Permutînd x cu y, P se transformă în Q deci $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, cum $\frac{\partial P}{\partial y}$ este o expresie simetrică în x şi y, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ are aceeaşi expresie deci cele două derivate sînt egale.

2) Funcţia $U(x, y)$ este determinată de cele două ecuaţii

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = \frac{1}{y}\left(3x^2 + 2y^2 - \frac{y^4}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^4}{y^2} + 2x^2 + 3y^2\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține o soluție a primei ecuații luînd pentru U o primitivă a funcției $x \to P(x, y)$ variabila y fiind un parametru fix. Celelalte soluții se obțin adăugînd la prima o funcție arbitrară $\varphi(y)$.

Fie $U(x, y) = \frac{1}{y}\left(x^3 + 2xy^2 + \frac{y^4}{x}\right) + \varphi(y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy} + \varphi(y)$.

Se scrie că a doua ecuație este verificată, de unde $\varphi'(y) = 0$ deci $\varphi(y) = C$.

(Se ia $\varphi(y) = 0$) deci $U(x, y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy}$.

3) Dacă A și B sînt extremitățile unui arc Γ din D se știe că

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma du \text{ și cum } A(1, 1),\ B\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right) \text{ rezultă}$$

$$\int_\Gamma \omega = U(B) - U(A) = U\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right) - U(1, 1) = \frac{(\pi^2+16)^2}{16\pi} - 4.$$

695. 1) Pentru ca integrala să fie nulă trebuie ca ω să fie diferențială totală

$$P = \frac{y(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2},\ Q = -\frac{x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2},\ \text{deci din } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ rezultă}$$

$$xzz'_x + yzz'_y = -(x^2+y^2). \qquad (1)$$

Sistemul caracteristicilor este $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)}$.

Soluția ecuației (1) este $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$ adică z este soluția a ecuației (1) deci $\int_\Gamma = 0$.

696. Pe segmentul AB avem $x = y = z$, deci

$$\int_{\Gamma^+} \frac{(y+z)dx + (x+y)dy + dz}{x^2+y^2} = \int_1^2 \frac{(4x+1)dx}{2x^2} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}$$

iar pe elice

$$\int_{\Gamma^+} \frac{(y+z)dx + (z+y)dy + dz}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{K}{r}t\sin t + \frac{K}{r^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2K\pi}{r^2}(1 + r).$$

697. Curba C fiind situată pe cilindrul $x^2 + y^2 - ax = 0$ se folosesc coordonate cilindrice $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Cercul de bază al cilindrului are ecuația $r = a\cos\theta$, deci $x = a\cos^2\theta$, $y = a\sin\theta\cos\theta$, $z = z$. Curba fiind și pe sferă trebuie ca să avem $a^2\cos^4\theta + a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + z^2 = a^2$ de unde $z = a\sin\theta$.

Scanned with OKEN Scanner

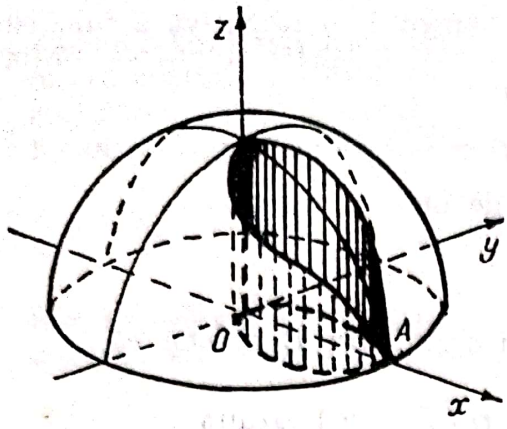

Fig. 18.

Înlocuind se obține

$$\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz = a^3\int_0^{\pi}\left(\cos^5\theta + \right.$$

$$\left. + \sin^2\theta\cos 2\theta - \frac{\sin^3 2\theta}{4}\right)d\theta = -\frac{\pi a^3}{4}.$$

698. $P=\dfrac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}$, $Q=\dfrac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}$.

Avem $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Punctele $A\,(1,\ 0)$ și $B(-1,\ 0)$ sînt puncte singulare. Dacă curba închisă nu conține în interior nici un punct singular, atunci integrala este nulă.

În cazul de față integrala curbilinie are aceeași valoare pe orice curbă închisă care conține în interior punctul (1, 0). Vom calcula integrala pe un cerc cu centrul în $A(1,\ 0)$ și rază r.

Coordonatele unui punct de pe cerc sînt

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

și integrala devine

$$\int_C = \int_0^{2\pi} \frac{-2r^2(1 + r\cos t)\sin^2 t - r^2\cos^2 t\,(2 + r\cos t)}{r^2\cos^2 t(2 - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt$$

raza r poate fi luată arbitrar de mică, de exemplu $r = 0$ și integrala devine

$$-\int_0^{2\pi}\frac{2dt}{4\cos^2 t + \sin^2 t} = -2\int_0^{2\pi}\frac{d(\operatorname{tg} t)}{4 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Însă $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$. În aceste ultime integrale se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} t = u$ și rezultă -2π. Integrala curbilinie, luată pe o curbă C care conține în interior cele două puncte singulare A și B va fi egală cu suma integralelor curbilinii luate pe două curbe C' și C'' care conțin în interior A și B respectiv, fiecare luată în sens direct. Propoziția este analoagă pentru un număr oarecare de puncte singulare.

699. Trebuie ca $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ unde

$$P = -\frac{(ax^2 + 2bxy + cy^2)y}{(x^2 + y^2)^n},\quad Q = \frac{(ax^2 + 2bxy + cy^2)x}{(x^2 + y^2)^n}.$$

Condiția conduce la

$$2n(x^2 + y^2)(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 4(x^2 + y^2)(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

deci valoarea cerută este $n = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Expresia propusă se scrie

$$du = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

care în coordonate polare și ținînd seama că

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \text{ dă}$$

$du = (a\cos^2\theta + 2b \sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)d\theta.$

Deci

$$\int_{AMB} du = \int_0^{2\pi} (a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)\,d\theta = \pi(a + c),$$

rezultat independent de x_0 și x_1.

700. Chestiunea revine la a găsi pentru ecuația diferențială

$$2xy\,dx + (1 - x^2)dy = 0 \qquad (1)$$

un factor integrant care să se reducă pentru $x = 0$ la $\frac{1}{1+y^2}$ (vezi cap. ecuații diferențiale). Ecuația admite un factor integrant $\frac{1}{y(1-x^2)}$ căci expresia

$$\frac{1}{y(1-x^2)}[2xy\,dx + (1 - x^2)dy] = \frac{2x\,dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y}$$

este o diferențială totală exactă.

$\frac{2x\,dx}{1-x^2} + \frac{dy}{y} = d \ln \frac{y}{1-x^2}$, deci integrala generală a ecuației (1) este

$$\frac{1 - x^2}{y} = C.$$

După o propoziție clasică a teoriei factorului integrant, orice factor integrant al ecuației (1) este de forma

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{y - x^2} F\left(\frac{1 - x^2}{y}\right).$$

Această expresie se reduce pentru $x = 0$ la $\frac{1}{y} F\left(\frac{1}{y}\right)$. Condiția din enunț conduce atunci la

$$\frac{1}{y} F\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{1 + y^2}, \quad F\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{1 + y^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y^2}}$$

deci

$$F\left(\frac{1 - x^2}{y}\right) = \frac{\frac{1 - x^2}{y}}{\frac{(1 - x^2)^2}{y^2} + 1} = \frac{y(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2 + y^2}.$$

Aşa dar

$$f(x,\ y) = \frac{1}{(1-x^2)^2 + y^2}.$$

Integrala curbilinie

$$\int_C \frac{2xy\,dx + (1-x^2)\,dy}{(1-x^2)^2 + y^2} = \int_C d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x^2-1}$$

este nulă pe un contur închis care nu conţine punctele singulare (1, 0) şi (−1, 0). Mai departe se va vedea ex. **698**.

701. Se calculează integrala curbilinie pe drumul $M_0NN'M$ (fig. 19). Rezultă

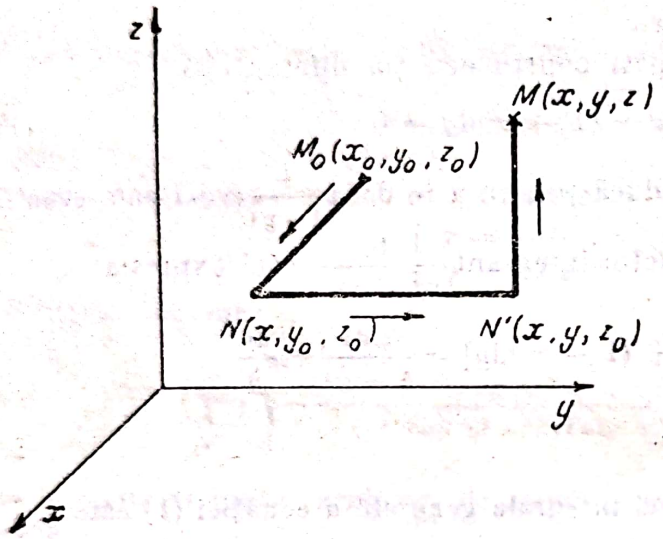

Fig. 19.

$$u(x,\ y,\ z) - u(x_0,\ y_0,\ z_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (y_0 + z_0)\,dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} (x + z_0)\,dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} (x + y)\,dz = xy + yz +$$

$$+ zx - (x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0)$$

De unde

$$u(x,\ y,\ z) = xy + yz + zx.$$

702. Se integrează pe acelaşi drum din fig. 19.

$$u(x,\ y,\ z) - u(x_0,\ y_0,\ z_0) = \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \int_{z_0}^{z} \frac{xy}{z^2}\,dz$$

de unde

$$u(x,\ y,\ z) - u(x_0,\ y_0,\ z_0) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} - \left(x_0 - \frac{x_0}{y_0} + \frac{x_0y_0}{z_0}\right)$$

deci

$$u(x,\ y,\ z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}.$$

703. $u(x,\ y,\ z) = \dfrac{ax - by}{z}$.

704. $u(x,\ y,\ z) = \dfrac{ze^z}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

705. $u(x,\ y,\ t) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{xy}$.

Scanned with OKEN Scanner

706. Se arată că ω este o diferențială totală exactă ; ea nu este definită în 0, integrala din ω este nulă pe orice contur închis de clasă C^1 care nu înconjoară origina. În coordonate polare forma diferențială devine :

$$\omega_1 = e^{-r\sin\theta}\left[\sin(r\cos\theta)\,\frac{dr}{r} + \cos(r\cos\theta)\,d\theta\right],$$

de unde

$$I(R) = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\cos(R\cos\theta)d\theta$$

$$I(R) < \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{R\sin\theta}\,d\theta < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$\left(\text{pe } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ avem } \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi} \text{ de unde}\right.$$

$$I(R) < \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \text{ și prin urmare } \lim_{R\to\infty} I(R) = 0.$$

Pe de altă parte :

$$\lim_{R\to 0}[e^{-R\sin\theta}\cos(R\cos\theta)] = 1$$

$$e^{-R\sin\theta}\cos(R\cos\theta) - 1 = (e^{-R\sin\theta} - 1)\cos(R\cos\theta) + \cos(R\cos\theta) - 1$$

de unde

$$|e^{-R\sin\theta}\cos(R\cos\theta) - 1| \leqslant |1 - e^{-R\sin\theta}| + |1 - \cos(R\cos\theta)$$

$$\leqslant R\sin\theta + \frac{R^2}{2}\cos^2\theta \leqslant R + \frac{R^2}{2}$$

convergența către 1 este uniformă în θ pe $[0, \pi]$
deci

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

Se va demonstra că integrala pe cercul complet nu este nulă și are ca limită 2π cînd $R \to 0$.

Integrala pe Γ, drum închis care nu înconjoară origina O este nulă, ea este egală pe de altă parte cu

$$\int_{\Gamma}\omega = I(R_2) + \int_{-R_2}^{-R_1}\frac{\sin x}{x}\,dx - I(R_1) + \int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

se deduce :

$$2\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin x}{x}\,dx = I(R_1) - I(R_2)$$

prin trecere la limită rezultă

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

INTEGRALA DUBLĂ

707. Se dă lui x o valoare constantă cuprinsă între 0 și $2a$ (fig. 20) y variază de la ordonata lui P la ordonata lui Q și apoi facem pe x să varieze de la 0 la $2a$.

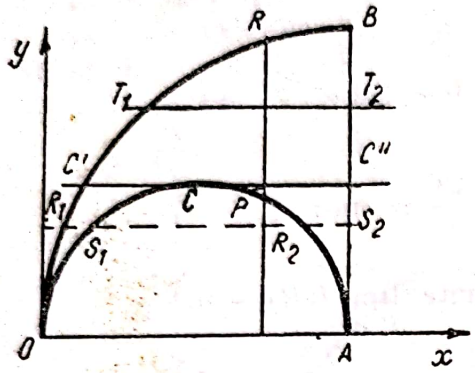

Fig. 20.

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\,dy$$

A schimba ordinea de integrare revine la a da lui y o valoare constantă. Va trebui să considerăm trei domenii (fig. 20).

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int_0^{a} dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_a^{2a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\,dx.$$

708. $\int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}$. **709.** $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ dar $\int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \text{ deci } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

710. $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx = \frac{33}{140}$.

711. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy =$

$$= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \frac{9}{4}.$$

Schimbînd ordinea de integrare (fig. 21).

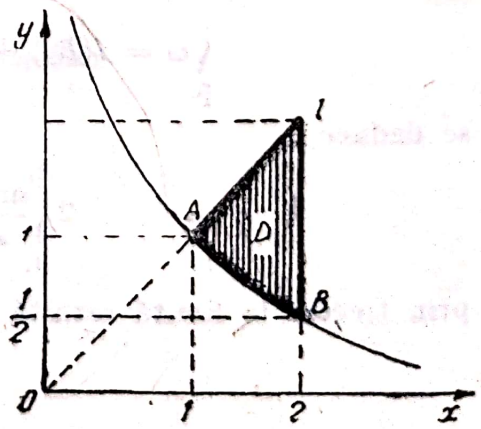

Fig. 21.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{x^2}{y^2}\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx = \frac{9}{4}.$$

712. $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy$, însă $\int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy =$

$$= \left| \frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \right|_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)x^2$$

deci

$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

713. $\int_0^1 dy \int_0^y \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 + y^4 - x^4}} = \int_0^1 \arcsin \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^4}}\,dy$ se face $y^2 = \operatorname{tg} t$ și $\frac{y^2}{\sqrt{1 + y^4}} = \sin t$.

deci

$$\arcsin \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^4}} = \arcsin(\sin t) = t = \operatorname{arctg} y^2$$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} y^2\,dy = \left| y \operatorname{arctg} y^2 \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{2y^2}{1 + y^4}\,dy =$$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}[\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \pi(\sqrt{2} - 1)]$ pentru ultima integrală vezi ex. 135.

714. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \int_0^1 dx \int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ se face $y = t^2$

se obține

$$2\int \frac{t\,dt}{\sqrt{x} + t} = 2\,[t - \sqrt{x}\ln(t + x)]$$

deci $$\int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2\sqrt{x - a} - 2\sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x}}$$

$$2\int_0^1 \left(\sqrt{x - a} - \sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x}}\right) dx = 4\frac{4 - a}{9}\sqrt{1 - a} - \frac{4}{9}(1 - a\sqrt{a}) -$$

$$- \frac{4}{3}\ln(1 + \sqrt{1 - a}).$$

715. $I = \int_0^1 y\,dy \int_0^{\sqrt[3]{1 - y^3}} \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\,x^2\,dx = \int_0^1 y\,dy \left| -\frac{1}{4}(1 - x^3 - y^3)^{\frac{4}{3}} \right|_0^{\sqrt[3]{1 - y^3}} =$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - y^3)^{\frac{4}{3}} \cdot y\,dy$. În ultima integrală binomă se face $y^{-3} - 1 = t^3$ și se obține $\frac{\pi\sqrt{3}}{81}$.

Scanned with OKEN Scanner

716. $\int_0^1 x^{p-1}\,dx \int_0^{1-x} y^{q-1}dy = \frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \frac{1}{q}B(p,\ q+1) =$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

717. $\int_0^1 x^{p-1}dx \int_0^{1-x} y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dy$; făcînd $y = (1-x)t$ rezultă

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}dx \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}dt = B(p,\ q+r)\ B(q,\ r) =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

718. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\operatorname{tg}^2 y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\operatorname{tg} y} \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} y) \right|_0^1 dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \operatorname{ctg} y\, dy.$

Integrala este convergentă căci integrînd prin părţi avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \operatorname{ctg} y\, dy = y \ln \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y\, dy.$$

Prima parte este nulă, iar a doua este convergentă (vezi şi este calculată la (ex. 388) deci $I = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

719. 1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, se obţine

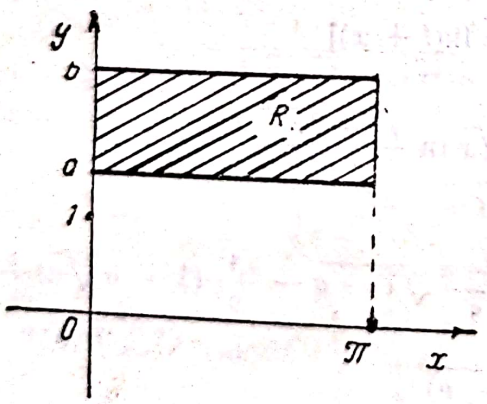

Fig. 22.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\lambda - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}.$$ 2) $\iint_D \frac{dx\,dy}{y-\cos x} =$

$$= \int_a^b dy \int_0^{\pi} \frac{dx}{y-\cos x} = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= \pi \left| \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \right|_a^b =$$

$$= \pi \ln \frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}.$$

3) $\iint_D \frac{dx\,dy}{y-\cos x} = \int_0^{\pi} dx \int_a^b \frac{dy}{y-\cos x} = \int_0^{\pi} \left| \ln(y-\cos x) \right|_a^b dx = \int_a^b \ln \frac{b-\cos x}{a-\cos x}\,dx =$

$$= \pi \ln \frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

720. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1+y\cos x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^a \frac{dy}{1+y\cos x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \Big| \ln(1+y\cos x) \Big|_0^a =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx = I \text{ dar } \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1+y\cos x} = \int\limits_0^a dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y\cos x}$$

se face $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și $y = \cos^2\theta$ se obține

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} \Big| \operatorname{arctg}(t\cdot\operatorname{tg}\theta) \Big|_0^1 = \frac{2\theta}{\sin 2\theta}$$

așadar

$$I = \int\limits_0^a \frac{2\theta}{\sin 2\theta}\, dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos a} \frac{2\theta}{\sin 2\theta}(-2\sin 2\theta)d\theta = \Big| -2\theta^2 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos a} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos a)^2.$$

721. $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$; $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$. Unghiurile făcute de drepte cu Ox sînt $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$

deci

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{24}.$$

722. În coordonate polare se obține $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\,d\theta =$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

723. $x = a\rho\cos\theta$. $y = b\rho\sin\theta$, $dx\,dy = ab\,\rho\,d\rho\,d\theta$

se obține

$$a^2b^2 \iint\limits_D \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \rho^2\,d\rho\,d\theta = a^2b^2 \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2\theta}} = \frac{a^2b^2}{3(a+b)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

724. $x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta$

$$I = ab\iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = ab\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_1^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi ab}{e}$$

ρ variază de la 1 valoare ce corespunde unui punct de pe elipsă pînă la ∞.

725. 1) Ecuația parabolei în coordonate polare este $\rho = 2\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \text{ iar } \rho \in \left[0,\ 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right].$$

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}}\frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos^2\theta d\theta}{2\cos^2\theta+\sin^4\theta} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

2) Din $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \pi$ se scade valoarea precedentă și se obține $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4}\pi$.

726 — 727. $I = J = \dfrac{\pi}{2}$ se trece în coordonate polare.

728. În coordonate polare $I = 2\pi\displaystyle\int\limits_0^{a}\frac{d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \frac{\pi a}{1+a^2} + \pi\operatorname{arctg} a.$

729. În coordonate polare $I = \displaystyle\int\limits_0^1\rho^4 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cdot\sin^2\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta =$

$$= \frac{1}{10\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5-3\cos 2\theta}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{7}{45}.$$

730. Se trece în coordonate polare și se obține $\dfrac{1}{c}\operatorname{arctg}\dfrac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

731. În coordonate polare $I = 2\pi\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}(\rho^2+b^2)^{1/2}}$. Se face $\rho^2 + a^2 = u^2$ și se obține

$$I = \frac{2\pi}{a(a+b)}.$$

732. $I = 2\pi$. **733.** Domeniul este un semicerc și I este dublul aceleiași integrale calculată pe sfertul de cerc din primul cadran. În coordonate polare se obține:

$$\frac{1}{2}I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{2a\sin\theta}\left(2a\rho - \rho^2\cdot\frac{1}{\sin\theta}\right)d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\theta}}\left(2a\rho - \frac{\rho^2}{\sin\theta}\right)d\theta =$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta + a^3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{3\sin^6\theta}\right)d\theta = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

734. $J = 3u^2v^2$ deci $I = 3\iint\limits_D e^{u^3} e^{v^3} u^2v^2\,du\,dv$.

Ecuațiile parabolelor în noile coordonate devin $u^2v(v^3 - 2p)) = 0$, $uv^2(u^3 - 2p) = 0$

$$I = 3\int_0^{\sqrt[3]{2p}} e^{u^3} u^2\,du \int_0^{\sqrt[3]{2}} e^{v^3} v^2 dv = \frac{(e^{2p} - 1)^2}{3}.$$

735. Se face schimbarea de variabile

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2},\quad y = \frac{v}{u^2 + v^2},\quad J = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Domeniul D se transformă în D_1 (fig. 23, 24).

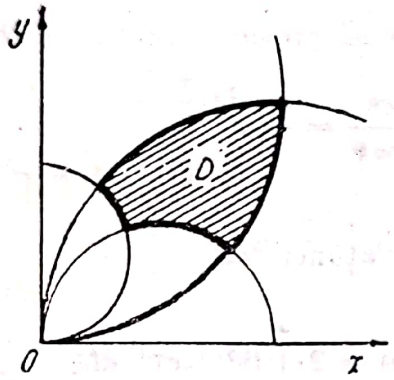

Fig. 23.

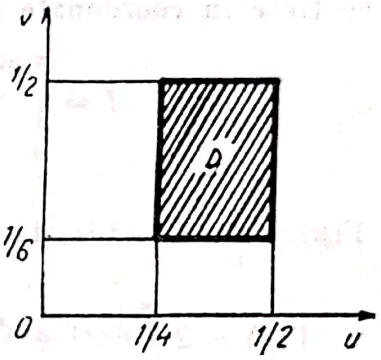

Fig. 24.

$$I = \iint\limits_{D_1} du\,dv = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} du \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{12}.$$

736. Se face schimbarea de variabile $\frac{x^2 + y^2}{2x} = u$; $\frac{y}{x} = v$.

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{4u}{(1 + v^2)^2}.$$

Domeniul D se transformă în D_1 (fig. 25, 26).

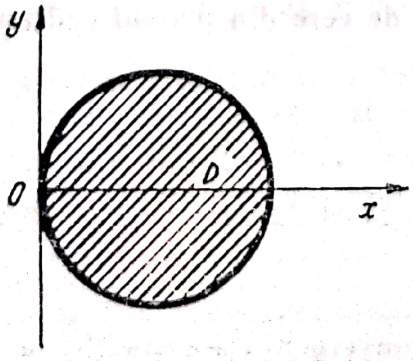

Fig. 25.

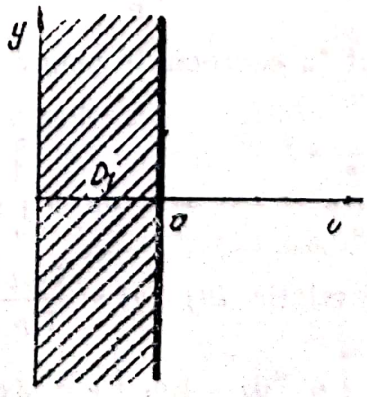

Fig. 26.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$4\int_0^a \sqrt{a^2-u^2}\,du \int_0^\infty \frac{dy}{(1+v^2)^2} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

737. Se face schimbarea de variabile: $u = x + y$; $v = \frac{y}{x}$.

$$J = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\text{deci } \iint_D e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-u^2}\,u\,du \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

738. Se trece în coordonate polare

$$I = \int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos\theta)} \frac{\rho^2 d\rho d\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\pi a^3}{2}.$$

739. $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, făcînd $x = t^2$ atunci

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty t^{2p-1}\,e^{-t^2}\,dt \text{ iar } \Gamma(q) = 2\cdot\int_0^\infty t^{2q-1}\,e^{-t^2}\,dt.$$

convergente pentru $p > 1$, $q > 1$.
Dacă în funcția

$$B(p,\ q) = \int_0^\infty x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ se face } x = \sin^2\varphi,$$

atunci

$$B(p,\ q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\cdot\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Se consideră produsul

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty y^{2q-1}\,e^{-y^2}\,dy =$$

$$= 4\iint_D \rho^{2(p+q)-1}\,e^{-\rho^2}\,\cos^{2p-1}\theta\cdot\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$

s-a trecut în coordonate polare, D sfertul de cerc din primul cadran a cărui rază $\to \infty$.

$$2\int_0^\infty \rho^{2(p+q)-1}\,e^{-\rho^2}\,d\rho\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta = \Gamma(p+q)\,B(p,\ q)$$

de unde relația $B(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

740. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ a cărei convergență s-a stabilit la ex. 399.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm

$$I(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx = \int_0^a e^{-y^2}\,dy.$$

$$I^2(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx \int_0^a e^{-y^2}\,dy = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

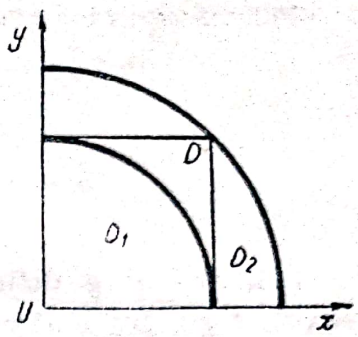

Fig. 27.

D fiind pătratul cu vîrful în O, de laturi a. Se consideră domeniul D, limitat de axele de coordonate și de cercul de rază a și D_2 limitat de axe și cercul de rază $a\sqrt{2}$. Avem

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Trecînd în coordonate polare se obține

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < I^2(a) < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2})$$

făcînd $a \to \infty$ rezultă

$$\lim_{a\to\infty} I^2(a) = \frac{\pi}{4} \text{ de unde } \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

741. $\int_{\Gamma^+} -y^3dx + x^3dy = 3\iint_{\rho\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{3\pi}{2}.$

742. Un punct din domeniu are coordonatele $x = 2 + \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$; $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.
Integrala devine

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Folosind formula lui Green avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x - 3 - (x^2+y^2),$$

de unde se poate lua

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 3 \text{ și } \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Deci

$$Q = 2x^2 - 3x + \varphi_2(y);\ P = x^2y + \frac{y^3}{3} + \varphi_1(x)$$

Funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(y)$ pot fi luate egale cu zero deoarece $\varphi_1(x)dx + \varphi_2(y)dy$ este diferențială totală exactă și integrala ei pe un contur închis este nulă. Rezultă

$$\iint_D (4x - 3 - x^2 - y^2)dx\,dy = \int_{C^+}\left(x^2y + \frac{y^2}{3}\right)dx + (2x^2 - 3x)dy.$$

Un punct de pe care are coordonatele

$$x = 2 + \cos t;\ y = \sin t,\ t \in [0,\ 2\pi] \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

743. Se aplică formula lui Green

$$I = 3\iint_D (2ay - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$ În coordonate polare

$$I = 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{a}{\sin\theta}}^{2a\sin\theta} (2a\rho^2 \sin\theta - \rho^3)\,d\rho = \text{etc.}$$

744. a) f și g definite în $\mathbf{R}^2$ prin $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}\cos 2xy$, $g(x, y) = e^{-x^2+y^2}\sin 2xy$ sînt continui și continui diferențiabile în $\mathbf{R}^2$ și se verifică că

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-x^2+y^2}(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy)$$

Se aplică formula lui Green pentru curba Γ și domeniul D.

$$\int_{\Gamma^+} f\,dx + g\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

b) Integrala pe conturul alăturat este suma integralelor (fig. 28).

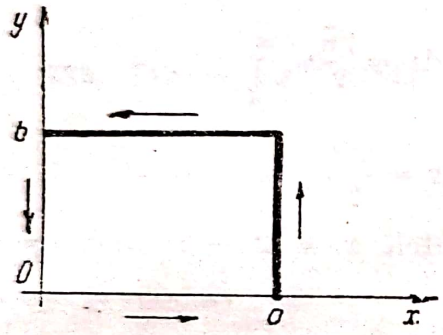

Fig. 28.

pentru

$$y = 0,\ I_1 = \int_0^b e^{-x^2}\,dx$$

$$x = a,\ I_2 = \int_0^b e^{-a^2} e^{y^2}\sin 2ay\,dy$$

$$y = b,\ I_3 = \int_a^0 e^{b^2} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

$$x = 0,\ I_4 = 0 \text{ deci } I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

c) Dacă $a \to \infty$, $I_1 \to \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$0 \leqslant y \leqslant b \Rightarrow \left|e^{y^2}\sin 2ay\right| \leqslant e^{b^2} \text{ deci}$$

$$I_2 < e^{-a^2} e^{b^2}\pi \text{ dacă } a \to \infty,\ I_2 \to 0$$

$$\text{și } \int_0^a e^{b^2} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = I_3 = I_1 + I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ceea ce arată că funcția $x \to e^{-x^2}\cos 2bx$ este integrabilă pe $[0, \infty[$ și că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

745. Aplicînd formula lui Green se obține $I = 12\iint_D xy\,dx\,dy$ sau în coordonate polare $I = 12\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{3}{2}(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

746. Integrala este convergentă. Se face calculul în coordonate polare, domeniul fiind atunci determinat de

$$r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant a \text{ şi } r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant a$$

Domeniul va fi împărţit în două, de unde $I=I_1+I_2$ cu

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{a}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}^{\frac{a}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}\,dr,\qquad I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{a}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}^{\infty}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}\,dr$$

Se face în cele două integrale schimbarea

$$r=\frac{a}{\cos\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ şi se obţine}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}-\theta}^{\frac{\pi}{4}+\theta}\frac{\sin^2\varphi}{a}\,d\varphi=\frac{\pi^2}{32a},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{\theta-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{a}\,d\varphi=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\right),\quad I=\left(\frac{3\pi^2}{32}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}.$$

747. $A=\iint_D dx\,dy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy=\frac{9}{2}$. (Fig. 29).

748. Curba este lemniscata cu vîrfurile pe bisectoare şi tangentei în 0 la axe şi are ecuaţia $\rho=a\sqrt{\sin 2\theta}$ (Fig. 30)

$$\frac{A}{2}=\iint_D\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2},\ \text{deci } A=a^2.$$

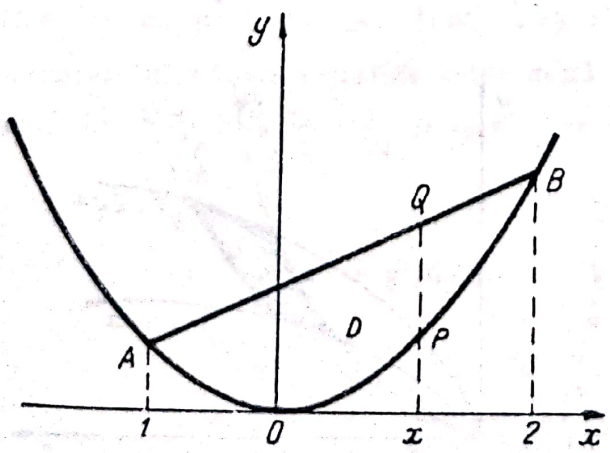

Fig. 29.

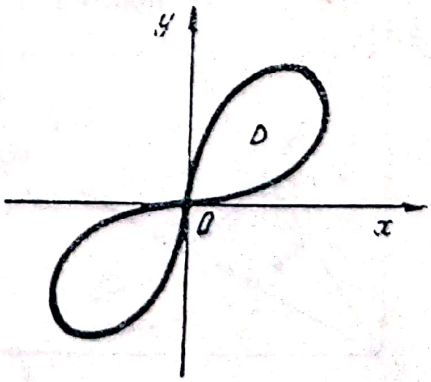

Fig. 30.

749. Ecuația curbei în coordonate polare este $\rho = \sqrt{a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta}$, cum $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ curba este simetrică față de pol. Trebuie să avem

$$\begin{matrix} a\cos\theta - b\sin\theta \geqslant 0 \\ a\cos\theta + b\sin\theta \geqslant 0 \end{matrix}$$ semnele corespund pentru ca ρ să existe

Deci $\operatorname{tg}\theta < \frac{a}{b}$ sau $\theta < \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ și $\operatorname{tg}\theta > -\frac{a}{b}$ sau $\theta > -\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.

$$A = 2\int_{-\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta}} \rho\cdot d\rho = (a^2 - b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Dar $\sin 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = 2\sin\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\cos\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Punem $\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = u$, $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} u$ atunci $\sin u\cos u = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{ab}{a^2+b^2}$, deci

$$A = (a^2 - b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + ab.$$

750. Făcînd $x = \rho\cos^2\theta$; $y = \rho\sin^2\theta$, $J = 2\rho\sin\theta\cos\theta$.
Curba are ecuația $\rho = a\cos^4\theta\sin^4\theta$

$$A = \iint_D dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{a\cos^4\theta\sin^4\theta} \rho\,d\rho = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\theta\sin^5\theta\,d\theta = \frac{a^2}{210}.$$

751. Ecuația curbei este $\rho = \frac{a^2 b}{c^2}\cos^2\theta\sin\theta$, iar $A = \frac{\pi}{32}\frac{a^5b^3}{c^6}$.

752. $A = \iint_D dx\,dy$. Se face $xy = u$; $\frac{y}{x} = v$ $p \leqslant u \leqslant q$; $a \leqslant v \leqslant b$.

$J = \frac{1}{2v}$, deci $A = \frac{1}{2}\int_p^q du\int_a^b \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}$; (Fig. 31).

753. Se face $y^2 = ux$; $p \leqslant u \leqslant q$ și $x^2 = vy$; $a \leqslant v \leqslant b$, de unde

$$x = \sqrt[3]{uv^2},\quad y = \sqrt[3]{u^2 v},\quad \text{iar } J = \frac{1}{3},\quad \text{deci}$$

$$A = \frac{1}{3}\iint_D du\,dv = \frac{1}{3}\int_p^q du\int_a^b dv = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)\text{: (Fig. 32).}$$

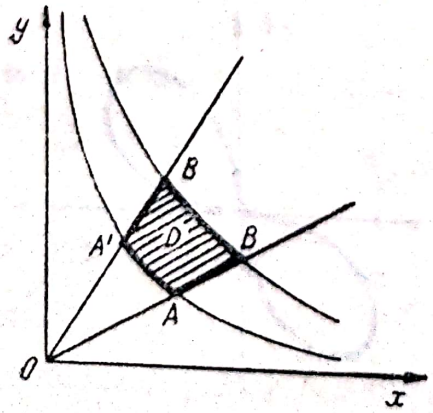

Fig. 31.

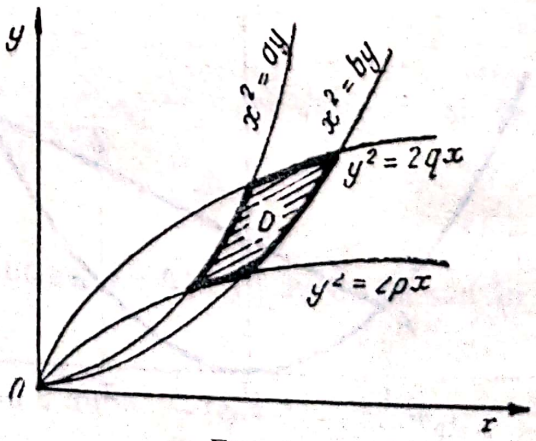

Fig. 32.

754. $A = \iint\limits_D \rho \, d\rho \, d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int\limits_a^{a\sqrt{2}\cos 2\theta} \rho \cdot d\rho = a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

755. $V = \iint\limits_D \frac{xy}{a}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$. Se trece în coordonate polare

$0 \leqslant \rho \leqslant a;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ V = \frac{1}{a^2}\iint\limits_D \sqrt{a^2 - \rho^2}\rho^3 \sin\theta\cos\theta .\, d\rho\, d\theta =$

$$= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\rho^3\, d\rho = \frac{a^3}{15}.$$

În ultima integrală se face $\rho = a\sin t$.

756. $V = \iint\limits_D \frac{x^2 + y^2}{a}\, dx\, dy = \frac{1}{a}\iint\limits_D \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{a}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^3\, d\rho = \frac{\pi a^3}{8}$.

757. $V = \iint\limits_D \left(\sqrt{8 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx\, dy = \frac{4\pi}{3}(8\sqrt{2} - 7)$

D fiind $x^2 + y^2 \leqslant 4$

758. $V = \iint\limits_D (\sqrt{1 - (2x^2 + y^2)} - \sqrt{2x^2 + y^2})\, dx\, dy$ D este interiorul proiecției pe planul xOy a curbei de intersecție a elipsoidului cu conul, a cărei ecuație este $4x^2 + 2y^2 = 1$ sau

$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Se face $x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta$ și se obține

$$V = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

759. $V = \frac{16a^3}{9}(3\pi - 4)$. **760.** Curba de intersecție a celor două suprafețe are ca proiecție pe planul xOy elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$ obținută prin eliminarea lui z între ecuațiile celor două suprafețe. O paralelă la Oz taie volumul în $z_1 = 2 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24}$ și $z_2 = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{72}$ $V = \iint\limits_D (z_1 - z_2)dx\, dy = 24\pi$.

761. $V = \frac{4}{c}\iint\limits_D (x^2 + y^2)dx\, dy = \frac{4}{c}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}} \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{c}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)^2} =$

$$= \frac{4a^4}{c}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(2 - \sin^2 2\theta)^2} = \frac{4a^4}{c}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{(2 - \sin^2 2\theta)^2} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(2 - \sin^2 2\theta)^2}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Se face în a doua $\theta = \frac{\pi}{2} - u$ și $V = \frac{4a^4}{c} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{(2 - \sin^2 2\theta)^2} = \frac{3\pi a^4}{2c\sqrt{2}}$.

762. Prima suprafață este un con de rotație, a doua un cilindru cu generatoarele paralele cu Oz, având drept curbă directoare cuartica $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, care în coordonate polare are ecuația $\rho = a(1 - \cos\theta)$, aceasta fiind o cardioidă în planul xOy. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$.

763. $V = \frac{19\pi a^3}{128}$. **764.** $V = \iint_D [f(x) + g(y)]dx\,dy$.

Se aplică formula lui Green

$$f(x) + g(y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \to \frac{\partial Q}{\partial x} = g(y)\,;\ \frac{\partial P}{\partial y} = -f(x)\,:$$

$$Q = x\,g(y)\,;\ P = -y\,f(x).$$

$$V = \int_\Gamma x\,g(y)dy - y\,f(x)dx$$

765. $I_x = \iint_D y^2 dx\,dy = \frac{\pi a^5}{4}$. **766.** $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)dx\,dy = \frac{ab}{4}(a^2 + b^2)$.

767. $I_0 = \frac{\pi a^4}{16}$. **768.** $b = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **769.** $y_G = 0$;

$$x_G = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} : \iint_D x\ dx\ dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} \rho^2\,d\rho = \frac{\pi}{4}(b^3 - a^3)$$

iar $\iint_D dx\,dy = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$: deci $x_G = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a + b)}$.

770. $x_G = \frac{\int_0^a dx \int_0^b x(x^2 + y^2)\,dy}{\int_0^a dx \int_0^b (x^2 + y^2)\,dy} = \frac{a}{4}\,\frac{3a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}$

$$y_G = \frac{\int_0^a dx \int_0^b y(x^2 + y^2)}{\int_0^a dx \int_0^b (x^2 + y^2)dy} = \frac{b}{4}\,\frac{3b^2 + 2a^2}{a^2 + b^2}.$$

771. Se consideră suprafața $z = e^{-y^2}\cos x^2$ și se calculează volumul limitat de planele xOz, yOz, inferior de $z = 0$ și superior de suprafață, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Calculînd succesiv volumul în coordonate carteziene și polare se obține integrala cerută.

$$V = \iint_D e^{-y^2}\cos x^2 dx\,dy \text{ lăsînd } y \text{ constant avem}$$

$$T = e^{-y^2}\,dy \int_0^\infty \cos x^2\,dx = Ie^{-y^2}\,dy \text{ deci } V = \int_0^\infty Ie^{-y^2}\,dy = I\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În coordonate polare $V = \iint_D e^{-\rho^2 \sin^2\theta} \cos(\rho^2\cos^2\theta)\rho \, d\rho \, d\theta$.

$T = d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2 \sin^2\theta} \cos(\rho^2\cos^2\theta)\rho \, d\rho$ în care se face $\rho^2\cos^2\theta = u$,

$$T = \frac{d\theta}{2\cos^2\theta} \int_0^{\infty} e^{-u \operatorname{tg}^2\theta} \cos u \, du,$$

dar $\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \cos u \, du = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$; deci $T = \frac{tg^2\theta}{1+\operatorname{tg}^4\theta} \cdot \frac{d\theta}{2\cos^2\theta}$.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^4\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}; \quad t = \operatorname{tg}\theta.$$

Egalînd rezultatele $I\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ deci $I = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Un calcul identic dă $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

772. În coordonate polare avem $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} \frac{d\rho}{\rho 2\alpha - 1}$ care are sens dacă $2\alpha - 1 < 1$ adică $\alpha < 1$.

773. $\alpha > 1$. **774.** Integrala se reduce la $2\pi \int_0^{1} \frac{d\rho}{(1-\rho^2)^{\alpha}}$ deci $\alpha < 1$ pentru ca integrala să fie convergentă.

775. Se face schimbarea de variabile $x = \rho^{\frac{2}{\alpha}} \cos^{\frac{2}{\alpha}}\theta$; $y = \rho^{\frac{2}{\beta}} \sin^{\frac{2}{\beta}}\theta$ Iacobianul este $J = \frac{4}{\alpha\beta} \rho^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-1} \cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta$ și integrala devine

$$\frac{4}{\alpha\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{1} \frac{d\rho}{\rho^2\left(m - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)+1}$$ care are sens dacă $2\left(m - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) + 1 < 1$ adică $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > m$.

776. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < m$ **777.** $m < 1$.

778. 1) $I(\alpha)$ este o funcție descrescătoare pe $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$I(\alpha) = \iint_{\theta(\alpha)} \frac{dx\,dy}{1-xy}$$

$1 - xy > 0$, deoarece $0 \leqslant x \leqslant 1$ și $0 \leqslant y \leqslant 1$ Fig. 33, 34.

Scanned with OKEN Scanner

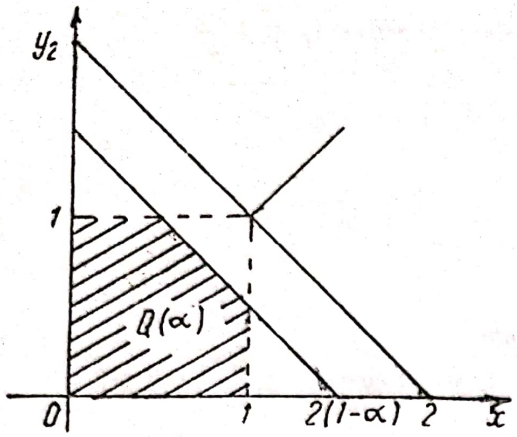

Fig. 33.

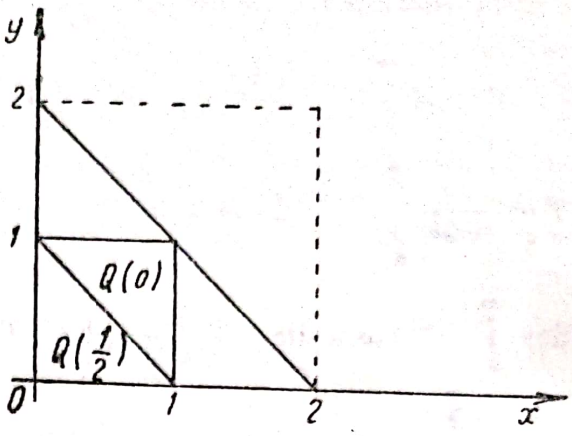

Fig. 34.

Pentru $\alpha > 0$, punctul (1, 1) nu aparține lui $Q(\alpha)$, deci $1 - xy > 0$. Integrala are un sens și funcția de integrat este pozitivă. Dacă $\alpha > \alpha'$, avem $Q(\alpha) \subset Q(\alpha')$ deci pentru că f este pozitivă

$$\iint\limits_{Q(\alpha)} \frac{dx\,dy}{1-xy} \leqslant \iint\limits_{Q'(\alpha')} \frac{dx\,dy}{1-xy};\quad I(\alpha) \leqslant I(\alpha')$$

Dacă $\alpha = 0$ punctul (1, 1) aparține lui $Q(0)$ și funcția de integrat nu este definită în orice punct a lui $Q(0)$. Apriori integrala pe $Q(0)$ nu este deci definită.

2) Se notează $x = u - v$ și $y = u + v$, elementul $dx \wedge dy$ devine $2du \wedge dv$ și $\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$. Să studiem transformata domeniului $Q(\alpha)$ în planul (u, v). Fig. 35.

Dacă se notează $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(U - V)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(U + V)$, $U = \sqrt{2}u$, $V = \sqrt{2}v$ se constantă că $(x, y) \to (u, v)$ este o rotație de centru O și de unghi $\frac{\pi}{4}$. Cu alte cuvinte se iau ca axe OU și OV, axele purtate pe prima și a doua bisectoare ale axelor (Ox, Oy). În sfîrșit, $(U, V) \to (u, v)$ este o omoteție de centru O și de raport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Transformata domeniului $Q(\alpha)$ este deci definită în planul (U, V) prin

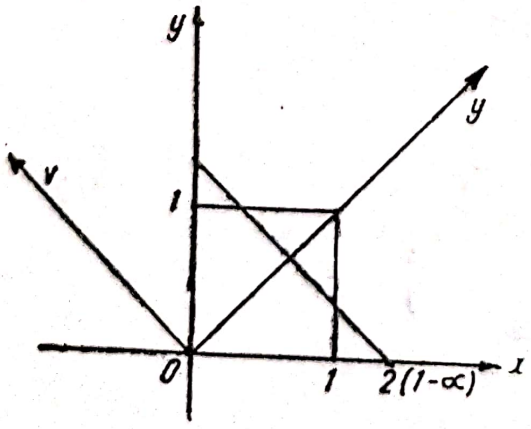

Fig. 35.

$$0 \leqslant U \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},\quad -U \leqslant V \leqslant U$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant U \leqslant \sqrt{2}(1-\alpha)$$

$$U - \sqrt{2} \leqslant V \leqslant -U + \sqrt{2}$$

de unde transformatul domeniului $Q(\alpha)$ în planul (u, v): $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$;

$$-u \leqslant v \leqslant u;\quad \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1 - \alpha;$$

$$u - 1 \leqslant v \leqslant -u + 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrala $I(\alpha)$ se scrie:

$$I(\alpha) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^{u} \frac{du\,dv}{1-u^2+v^2} + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \int_{u-1}^{1-u} \frac{du\,dv}{1-u^2+v^2}$$

dar

$$\int \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{\sqrt{1-u^2}} + C$$

prin urmare:

$$I(\alpha) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

3) Calculul lui $I(\alpha)$

dacă $\theta = \arcsin u$; $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ se obține:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d\theta, \quad \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta) = \theta$$

De altfel $\operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ dar $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

așadar

$$\operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

Atunci

$$\frac{1}{4} I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin(1-\alpha)} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

deci

$$\frac{1}{4} I(\alpha) = \frac{\pi^2}{72} + \frac{1}{4}\{\pi \arcsin(1-\alpha) - [\arcsin(1-\alpha)]^2\} - \frac{15\pi^2}{4 \cdot 36}$$

sau

$$I(\alpha) = \pi \arcsin(1-\alpha) - [\arcsin(1-\alpha)]^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

această expresie arată că

$$I : \alpha \to I(\alpha) \text{ este continuă pe } \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

dar pentru că $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \arcsin(1-\alpha) = \frac{\pi}{2}$ se obține:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XI

INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

779. Suprafaţa $z = \frac{1}{a}xy$ este un paraboloid hiperbolic. Aria căutată se obţine cu formula $A = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$, D fiind domeniul mărginit de cercul $x^2 + y^2 = a^2$.

Rezultă

$$A = \frac{1}{a}\iint_D \sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

sau în coordonate polare

$$A = \frac{1}{a}\iint_D \sqrt{a^2+r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{r^2+a^2}\,r\,dr = \frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

780. Cilindrii $x^2 + y^2 - ax = 0$, $x^2 + y^2 + ax = 0$ decupează în sfera dată patru ferestre Viviani. Aria unei ferestre decupate de cilindrul $x^2 + y^2 - ax = 0$ va fi

$$A = 2\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \qquad (1)$$

întinsă la semicercul $x^2 + y^2 - ax = 0$ situat deasupra axei Ox (fig. 36).

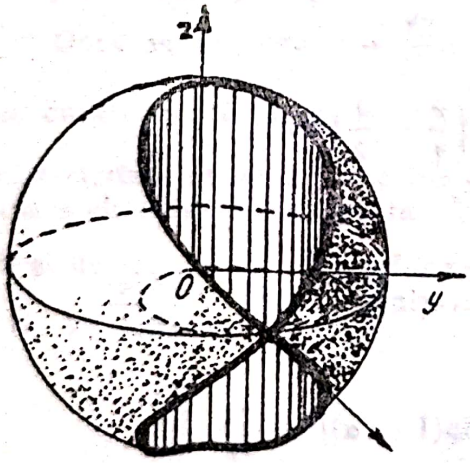

Fig. 36.

Dar

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

deci:

$$p = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$q = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Înlocuind în (1), se obţine

$$A = 2a\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Trecînd la coordonate polare, se obţine

$$A = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \text{ sau } A = \pi a^2 - 2a^2, \text{ deci } 4A = 4\pi a^2 - 8a^2,$$

deci dacă Σ este aria căutată, rezultă

$$\Sigma = 8a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

781. $A = 2\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$, D fiind semicercul de ecuație $x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0$. Dar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, deci $A = 2\sqrt{2}\iint_D dx\,dy$ sau în coordonate polare $A = 2\sqrt{2}\int\int r\,d\theta\,dr$.

Deci

$$A = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr = \pi\sqrt{2}.$$

782. Suprafața este un paraboloid de rotație în jurul axei Oz, cilindrul are generatoarele paralele cu axa Oz și are ca directoare în planul xOy lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \text{ (Fig. 37).}$$

$$A = 4\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy,$$

D, fiind domeniul mărginit de un sfert din lemniscata situată în regiunea pozitivă a axelor de coordonate. Dar cum $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, rezultă

$$A = \frac{4}{a}\iint_D \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

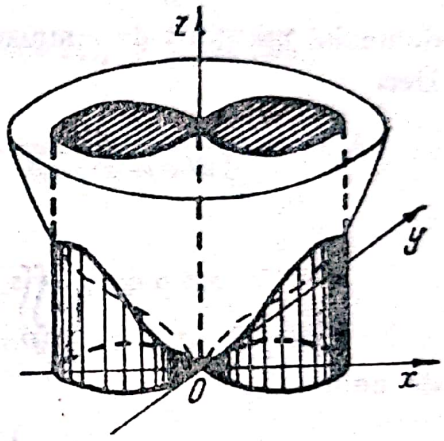

Fig. 37.

Se trece la coordonate polare și se obține

$$A = \frac{4}{a}\iint \sqrt{a^2 + r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 + r^2}\,r\,dr$$

Rezultă

$$A = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{(1 + \cos 2\theta)^3} - 1\right] d\theta = \frac{4a^3}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sqrt{2}\cos^3\theta - 1\right) d\theta.$$

Deci

$$A = \frac{1}{9}a^2(20 - 3\pi).$$

783. Cilindrul are generatoarele paralele cu Oz și are ca directoare în planul xOy lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. Sau în coordonate polare $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$. Aria decupată de cilindru în paraboloid este dată de formula $A = 2\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$. D fiind domeniul mărginit de bucla lemniscatei situate în regiunea pozitivă a axelor de coordonate. Cum $z = \frac{xy}{a}$

rezultă

$$A = \frac{2}{a}\iint\limits_D \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$ Se trece la coordonate polare

$$A = \frac{2}{a}\iint\limits_D \sqrt{a^2 + r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{2}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{a^2 + r^2}\,r\,dr.$$

Deci

$$A = \frac{a^3}{9}(20 - 3\pi).$$

784. $A = 8\iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$, unde $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; D este domeniul mărginit de lemniscata $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ și partea pozitivă a axei Ox. Deci

$$A = 8a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$ Se trece la coordonate polare și se obține

$$A = 8a\iint\limits_D \frac{r\,d\theta\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

de unde

$$A = 2a^2(\pi + 4 - 4\cdot\sqrt{2})$$

785. Suprafața este simetrică față de planele de coordonate și față de origine. Secționînd suprafața prin planul xOy, se obține $z = 0$ și $x^2 + y^2 = a^2$, deci în planul xOy un cerc cu centrul în origine și cu raza a. Secționînd prin planul xOz, se obțin cercurile $(x^2 + z^2)^2 - a^2x^2 = 0$ și $y = 0$.

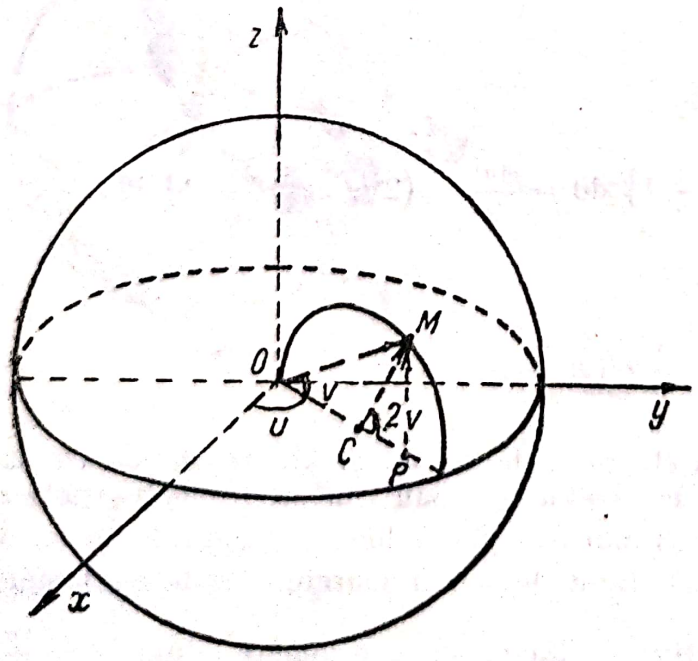

Fig. 38.

$$C_1: \begin{cases} x^2 + z^2 - ax = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

și $$C_2: \begin{cases} x^2 + z^2 + ax = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Suprafața poate fi concepută ca fiind generată de cercuri ale căror plane trec prin axa Oz și care au ca diametru raza cercului de secțiune prin planul xOy. Poziția punctului M pe suprafață este determinată de unghiul u făcut de planul cercului de secțiune cu planul xOz și de unghiul v făcut de vectorul de poziție al punctului M cu diametrul cercului de secțiune (Fig. 38).

Se poate obține o reprezentare parametrică a suprafeței. Dacă este vectorul de poziție al punctului M, rezultă $\bar{r} = \overline{OC} + \overline{CM}$ dar $\overline{CM} = \overline{CP} + \overline{PM}$, deci $\bar{r} = \overline{OC} + \overline{CP} + \overline{PM}$. $\triangle OCM$ este isoscel $\sphericalangle MCP = 2v$,

$$CP = \frac{a}{2}\cos 2v\,; \quad PM = \frac{a}{2}\sin 2v,$$

așadar

$$\overline{CP} = \frac{a}{2}\cos 2v \cos u\bar{i} + \frac{a}{2}\cos 2v \sin u\bar{j}\,;$$

$$\overline{OC} = \frac{a}{2}\cos u\bar{i} + \frac{a}{2}\sin u\bar{j}\,; \quad \overline{PM} = \frac{a}{2}\sin 2v\bar{k}$$

Așadar, ecuația vectorială a suprafeței este

$$\bar{r} = \frac{a}{2}\cos u(1 + \cos 2v)\bar{i} + \frac{a}{2}\sin u(1 + \cos 2v)\bar{j} + \frac{a}{2}\sin 2v\bar{k}$$

sau

$$\bar{r} = a\cos u\cos^2 v\bar{i} + a\sin u\sin^2 v\bar{j} + a\sin v\cos v\bar{k}.$$

Rezultă ecuațiile parametrice ale suprafeței

$$x = a\cos u\cos^2 v\,; \quad y = a\sin u\sin^2 v\,; \quad z = a\sin v\cos v.$$

Se calculează $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$; $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ și $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, se obține $E = a^2\cos^4 v$; $F = 0$ și $G = a^2$.

Atunci

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \iint a^2\cos^2 v\,du\,dv$$

sau

$$A = a^2\int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \cos^2 v\,dv = \pi^2 a^2\,.$$

786. Suprafața este simetrică față de planele de coordonate și față de origine (Fig. 39). Secționînd cu planul xOy, se obține lemniscata Bernoulli

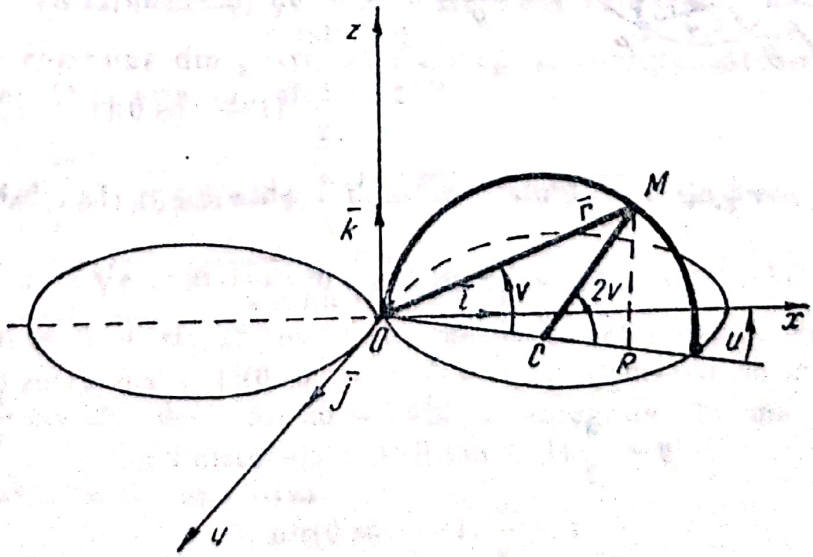

Fig. 39.

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ sau $r=a\sqrt{\cos 2u}$ în cpordonate polare. Suprafaţa este generată de cercuri ale căror plane trec prin axa Oz şi care au ca diametru raza vectoare a unui punct curent de pe lemniscată. Parametrii care determină pozitia punctului M pe suprafaţă sînt u şi v şi au semnificaţia din problema grecedentă şi din figura alăturată $\triangle OCM$ este isoscel, deci $\ast MCP=m\ 2v$. Un raţionament analog cu cel din problema precedentă ne conduce la ecuaţia vectorială a suprafeţel $\bar{r}=\sqrt{\cos 2u}\cos u(1+\cos 2v)\bar{i}+$ $+\frac{a}{2}\sqrt{\cos 2u}\sin u(1+\cos 2v)\bar{j}+\frac{a}{2}\sqrt{\cos 2u}\sin 2v\bar{k}$ sau $\bar{r}=a\sqrt{\text{coc }2u}$. $\cos^2 v\bar{i}+a\sqrt{\cos 2u}\sin u\cos^2 u\bar{j}+a\sqrt{\cos 2u}\sin a\cos v\bar{k}$, $x=a\sqrt{\cos 2u}\cos u\cos^2 v$; $y=a\sqrt{\cos 2u}$ cin $u\cos^2 v$ $z=\sqrt{\cos 2u}\sin v\cos v$; de unde rezultă

$$E=\frac{a^2\text{hos}^2 v}{\text{cns2}\ u}(\cos^2 v+\sin^2 v\sin^2 2u);\ F=a^2\cos v\sin v\sin 2u\ \ G=a^2\cos 2u$$

Aşadar

$$EG-F^2=a^4\cos^4 v.$$

Din cauza simetriei se calculează porţiunea din aria suprafeţei date, cuprinsă în octanul pozitiv al axelor de coordonare. Deci

$$A=8a^2\int\int\cos^2 v\,du\,dv=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 v\,dv\ \text{sau}\ A=\frac{\pi^2a^2}{2}$$

787. Secţionînd suprafaţa cu planul xOy, se obţine cardioida $(x^2+y^2+ax^2)=a^2(x^2+y^2)$ sau $r=a(1-\cos\theta)$ (Fig. 40). Analog se deduce că suprafaţa este generată de cercuri ale căror plane trec prin axa Oz şi au ca diametru raza vectoare a unui punct curent de pe cardioida $r=a(1-\cos\theta)$. Parametrii care determină poziţia unui punct M pe suprafaţă sînt unghiul θ făcut de planul unui cerc generator cu planul xOz şi unghiul φ făcut de raza cercului generator cu urma planului său pe planul xOy.

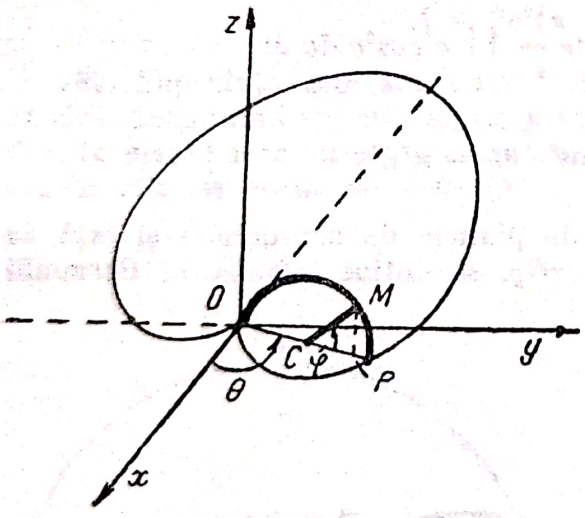

Fig. 40.

Se obţine ecuaţia vectorială a suprafeţei

$$\bar{r}=\frac{a}{2}(1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)\cos\theta\bar{i}+$$

$$+\frac{a}{2}(1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)\sin\theta\bar{j}+$$

$$+\frac{a}{2}(1-\cos\theta)\sin\varphi\,\bar{k},$$

de unde ecuaţiile parametrice $x=\frac{a}{2}(1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)\cos\theta$;

$$y=\frac{a}{2}(1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)\sin\theta;$$

$$z=\frac{a}{2}(1-\cos\theta)\sin\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$E = \frac{a^2}{2}(1 + \cos\varphi)^2(1 - \cos\theta) + \frac{a^2}{4}\sin^2\theta\sin^2\varphi\,;$$

$$F = -\frac{a^2}{4}(1 - \cos\theta)\sin\varphi\sin\theta\,;$$

$$G = \frac{a^2}{4}(1 - \cos\theta)^2\,; \quad EG - F^2 = \frac{a^4}{8}(1 + \cos\varphi)^2(1 - \cos\theta)^2,$$

deci

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\iint(1 + \cos\varphi)(1 - \cos\theta)\sqrt{1 - \cos\theta}\,d\varphi\,d\theta,$$

sau

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)d\varphi\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)\sqrt{1 - \cos\theta}\,d\theta\,,$$

de unde

$$A = a^2\int_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{16\pi a^2}{3}$$

788. Suprafața este generată de cercuri ale căror plane trec prin axa Oz și care au ca diametru raza vectoare a unui punct curent de pe rozeta cu patru foi $r = a\sin 2\theta$. Parametrii se aleg ca în problema precedentă. Se obține ecuația vectorială a suprafeței

$$\bar{r} = \frac{a}{2}\sin 2\theta\cos\theta(1 + \cos\varphi)\bar{i} + \frac{a}{2}\sin 2\theta\sin\theta(1 + \cos\varphi)\bar{j} + \frac{a}{2}\sin 2\theta\sin\varphi\bar{k},$$

de unde ecuațiile parametrice

$$x = a\sin\theta\cos^2\theta(1 + \cos\varphi)\,;$$
$$y = a\sin^2\theta\cos\theta(1 + \cos\varphi)\,;$$
$$z = a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi,$$

deci

$$d\sigma = a^2(1 + \cos\varphi)\sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Suprafața se compune din patru porțiuni egale, corespunzătoare celor patru foi ale rozetei. Deci aria suprafeței va fi

$$A = 4a^2\int_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,.$$

Pentru calculul $\int\sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, integrala se scrie sub forma $\frac{1}{4}\int\sqrt{4\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}\sin 2\theta\,d\theta$; se face schimbarea $\sin 2\theta\,d\theta = dt$ sau $t = -\frac{1}{2}\cos 2\theta$, deci $\cos 2\theta = -2t$ și integrala de mai sus devine $\frac{1}{4}\int\sqrt{1 + 12t^2}\,dt$ etc.; se obține

$$A = 2\pi a^2\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2 + \sqrt{3})\right] \text{ sau } A = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}[\ln(2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3}]$$

789. $x = a\cos u \sin v$; $y = a \sin u \sin v$; $z = a \cos v$, $d\sigma = a^2 \sin v \, du \, dv$. Rezultă

$$\iint_S (x + y + z)d\sigma = a^3 \int_0^{\pi} \cos u \, du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \, dv + a^3 \int_0^{\pi} \sin u \, du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \, dv +$$

$$+ a^3 \int_0^{\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v \, dv = \pi a^3.$$

790. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, deci $d\sigma = \sqrt{2}\, dx dy$;
rezultă

$$\iint_S (xy + yz + xz)d\sigma = \sqrt{2} \iint_D [xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}]\, dx\, dy,$$

unde (D) este domeniul mărginit de cercul $x^2 + y^2 = 2ax$. Integrala de mai sus devine, trecînd la coordonate polare,

$$\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 \, dr + \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta)d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 \, dr =$$

$$= 4a^4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta = 8a^4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta = \frac{64a^4\sqrt{2}}{15}.$$

791. Fie $M(\rho, \theta, \varphi)$ coordonatele sferice ale punctului M. Vom scrie că

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi;$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi;$$
$$z = \rho \cos\varphi;$$

verifică ecuaţia elipsoidului. Se obţine

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2}}.$$

Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sînt

$$x = a\cos\theta \sin\varphi;\ y = b\sin\theta \sin\varphi;\ z = c\cos\varphi.$$

Se calculează E, F şi G şi se obţine

$$E = a^2\sin^2\theta \sin^2\varphi + b^2\cos^2\theta \sin^2\varphi;\ F = (b^2 - a^2)\sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi;$$
$$G = a^2\cos^2\theta \cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2\sin^2\varphi.$$

Rezultă

$$EG - F^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin^2\varphi$$

Deci

$$d\sigma = abc\sqrt{\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi .$$

Aşadar

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\rho} = abc\iint_S\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi .$$

Pentru ca punctul M să acopere întreaga suprafaţă a elipsoidului, va trebui ca $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ şi $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

Aşadar

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\rho} = abc\left[\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi+\frac{1}{b^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right]$$

Aşadar

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\rho} = \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

792. Se aplică formulele

$$x_G = \frac{\iint_S x\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}; \quad y_G = \frac{\iint_S y\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}; \quad z_G = \frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}.$$

şi se folosesc ecnaţiile parametrice ale sferei

$$x = a\cos u\sin v;\ y = a\sin u\sin v;\ z = a\cos v,\ d\sigma = a^2\sin v\,du\,dv$$

Se obţine

$$x_G = \frac{a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 v\,dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\,dv} = \frac{a}{2},$$

din cauza simetriei rezultă

$$y_G = \frac{a}{2};\quad z_G = \frac{a}{2}.$$

793. Se folosesc formulele din problema precedentă $d\sigma = \sqrt{2}\,dx\,dy$

$$z_G = \frac{\iint_D z\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} = \frac{\iint_D r^2\cos\theta\,d\theta\,dr}{\iint_D r\,d\theta\,dr}$$

Scanned with OKEN Scanner

D fiind interiorul cercului $x^2 + y^2 = ax$. Se obține

$$x_G = \frac{a}{2}; \quad \text{analog } y_G = 0; \quad z_G = \frac{16a}{9\pi}.$$

794. $I_{0\sigma} = \int_S (x^2 + y^2)dm$, unde $dm = \rho_0 \, d\sigma$; $d\sigma = a^2 \sin v \, du \, dv$; $x^2 + y^2 = a^2\sin^2 v$,

deci

$$I_{0\sigma} = a^4 \cdot \rho_0 \int_S \sin^3 v \, du \, dv; \quad I_{0\sigma} = a^4 \rho_0 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \, dv$$

sau

$$I_{0\sigma} = \frac{4\pi a^4 \rho_0}{3}$$

795. Se știe că $dy \, dz = d\sigma \cos \alpha$; $dz \, dx = d\sigma \cdot \cos \beta$; $dx \, dy = d\sigma \cdot \cos \gamma$. Dar

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

unde

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}; \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}; \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)};$$

Dar

$$x = a \cos u \sin v; \quad y = a \sin u \sin v; \quad z = a \cos v.$$

Deci

$$A = -a^2 \cos u \sin^2 v; \quad B = -a^2 \sin u \sin^2 v;$$

$$C = -a^2 \sin v \cos v$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = a^4 \sin^2 v.$$

Dar cum integrarea se face pe fața exterioară a sferei $\sphericalangle \gamma$ făcută de normala la suprafață cu axa Oz este ascuțit, deci $\cos \gamma > 0$,

așadar

$$\cos \gamma = \frac{-a^2 \sin v \cos v}{-a^2 \sin v};$$

(Se ia semnul — în fața radicalului). Deci $\cos \gamma = \cos v$, atunci

$$\cos \alpha = \cos u \sin v; \quad \cos \beta = \sin u \sin v,$$

dar

$$d\sigma = a^2 \sin v \, du \, dv,$$

deci

$$dy \, dz = a^2 \cos u \sin^2 v \, du \, dv; \quad dz \, dx = a^2 \sin u \sin^2 v \, du \, dv;$$

$$dx \, dy = a^2 \sin v \cos v \, du \, dv;$$

rezultă

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + x\,dx\,dy = a^3 \iint_S (\cos^2 u \sin^3 v + \sin^3 u \sin^3 v + \sin^2 v \cos^2 v,\ du\,dv \text{ sau}$$

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = a^3 \iint_S \sin v\,du\,dv =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v\,dv = 4\pi a^3 .$$

796. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului sînt

$$x = a \cos u \sin v\,;\ y = b \sin u \sin v\,;\ z = c \cos v.$$

Se procedează ca în exercițiul precedent și se obține

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = -bc \cos u \sin^2 v\,;\ B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = -ac \sin u \sin^2 v\,;$$

$$C = -ab \sin v \cos u$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = b^2c^2\cos^2 u \sin^4 v + a^2c^2\sin^2 u \sin^4 v +$$

$$+ a^2b^2\sin^2 v \cos^2 v.$$

Integrînd pe fața exterioară a elipsoidului, rezultă

$$\cos\gamma = \frac{ab \sin v \cos u}{\sqrt{b^2c^2\cos^2 u\sin^4 v + a^2c^2\sin^2 u\sin^4 v + a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v}}$$

etc. de unde

$$dx\,dz = bc \cos u \sin^2 v\,du\,dv\,;$$

$$dz\,dx = ac \sin u \sin^2 v\,du\,dv\,;$$

$$dx\,dy = ab \sin v \cos v\,du\,dv\,;$$

așadar

$$\iint_S \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z}\right) = \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \iint_S \sin v\,du\,dv =$$

$$= abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v\,dv.$$

Deci

$$\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z} = \frac{4\pi(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}{abc}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XII

INTEGRALE TRIPLE

797. D fiind compactul reprezentînd volumul tetraedrului mărginit de planele $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ $x + y + z = 1$.

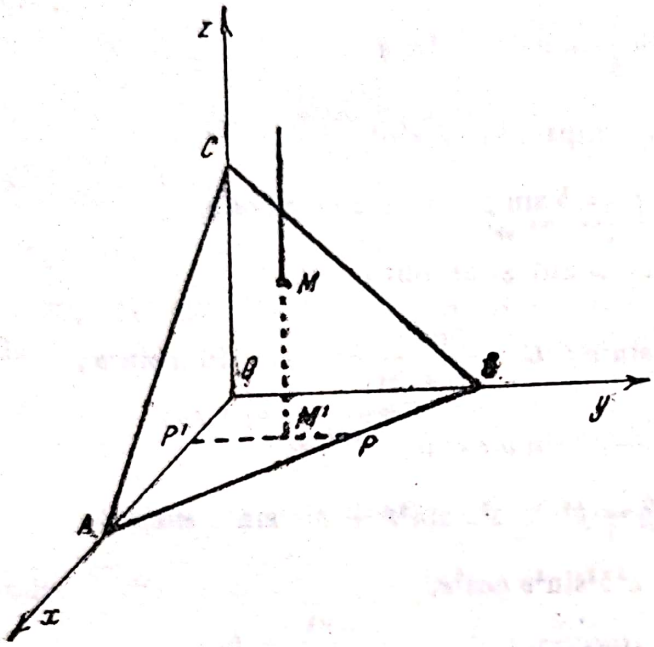

Fig. 41.

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$\iint_{OAB} dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Delta OAB} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} -$$

$$-\frac{1}{8} \iint_{\Delta OAB} dx\,dy$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

798. Compactul D fiind cel de mai sus avem:

$$I = \iiint_D \frac{x^6 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)} = \iint_{\Delta OBC} \frac{x^6 dydz}{y+z} \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{x+y+z},$$

adică

$$I = -\iint_{OBC} \frac{x^6 \ln(y+z)}{y+z}\,dy\,dz = -\int_0^1 z^3 dz \int_0^{1-z} \frac{\ln(y+z)}{y+z}\,dy$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 z^3 \ln^2 z\,dz, \text{ se face schimbarea } \ln z = t$$

deci $z = e^t$ și rezultă $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} t^3 e^{4t} dt$

$$\frac{1}{2}\int t^3 e^{4t} dt = e^{4t}(at^3 + bt + c);\ a = \frac{1}{8};\ b = -\frac{1}{16};\ c = \frac{1}{64}$$

$$I = \frac{1}{64} \text{ [când } t \to -\infty,\ e^{4t}(at^3 + b + c) \to 0]$$

799. Se trece la coordonate cilindrice $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$; $z = Z$; $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$; compactului D îi corespunde compactul

$$\Delta\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\Delta} \rho^2\sin\theta\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}.$$

800. Se trece la coordonate sferice: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$; $y = \rho\sin\theta\cdot\sin\varphi$; $z = \rho\cos\theta$; $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$,

aşadar:

$$I = \iiint_{\Delta} \rho^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

unde:

$$\Delta\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \end{cases}$$

Aşadar:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^5\,d\rho = \frac{1}{48}.$$

801. Procedăm analog cu precedentul $I = \frac{\pi}{10}$.

802. Se face schimbarea de variabile $x = aX$; $y = bY$; $z = cZ$. Domeniul transformat al lui D este definit prin $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$, $Z \geqslant 0$, $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 \leqslant 0$,

Iacobianul transformării este abc,

deci:

$$I = \iiint_{\Delta} (a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)abc\,dX\,dY\,dZ$$

Calculul lui I este echivalent cu calculul a trei integrale:

$$\iiint_{\Delta} X^2\,dX\,dY\,dZ;\quad \iiint_{\Delta} Y^2\,dX\,dY\,dZ;\quad \iiint_{\Delta} Z^2\,dX\,dY\,dZ$$

Este evident că domeniul Δ este invariant, dacă se permută X şi Y, Y şi Z, cele trei integrale sînt deci egale şi fiecare din ele are ca valoare $\frac{\pi}{30}$,

Deci:

$$I = (a^2 + b^2 + c^2)abc\,\frac{\pi}{30}.$$

803. Se trece la coordonate sferice. Compactului D îi corespunde compactul $\Delta: 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \rho \leqslant R$ se obține $I = \frac{\pi^2 R^4}{4}$.

804. Se trece la coordonate sferice: rezultă:

$$I = -\iiint_{\Delta} \rho^4 \cos 2\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

unde $\Delta: 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \rho \leqslant R$,
așadar

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos 2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{R} \rho^4 d\rho = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

805. $I = I_1 - I_2$: $I_1 = \iiint_{D_1} (x^2 + y^2 + xy)dx\,dy\,dz$;

$$D_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

$$I_2 = \iiint_{D_2} (x^2 + y^2 + xy)dx\,dy\,dz;\ D_2: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2.$$

Pentru calculul lui I_2 se utilizează coordonate sferice ρ, θ, φ, se obține:

$$I_2 = \iiint_{\Delta_2} \rho^4 \sin^2\theta (1 + \sin\varphi\cos\varphi) d\rho\,d\theta\,d\varphi: \quad \Delta_2 \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant c \end{cases}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{c} \rho^4 \, d\rho = \frac{8\pi c^5}{15}.$$

Pentru calculul lui I_1 se transformă domeniul D_1 (elipsoidul) într-un domeniu sferic, prin schimbarea de variabile $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$, rezultă:

$$I_1 = abc \iiint_{\Delta_1} (a^2X^2 + b^2Y^2 + abXY)dX\,dY\,dZ$$

$$\Delta_1: X^2 + Y^2 + Z^2 \leqslant 1$$

Așadar:

$$\frac{I_1}{abc} = \iiint_{\Delta_1'} \sin^2\theta (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + ab\sin\varphi\cos\varphi)\rho^4 \, d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Delta_1': 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

așadar:

$$\frac{I_1}{abc} = a^2 \iiint_{\Delta_1'} \rho^4 \sin^2\theta \cos^2\varphi \, d\rho\,d\theta\,d\varphi + b^2 \iiint_{\Delta_1'} \rho^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi \, d\rho\,d\theta\,d\varphi +$$

$$+ ab \iiint_{\Delta_1'} \rho^4 \sin^2\theta \sin\varphi\cos\varphi \, d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

se obține:

$$I_1 = \frac{4\pi}{15} abc\,(a^2 + b^2)$$

și deci

$$I = \frac{4\pi c}{15}[(a^2 + b^2)ab - 2c^4]$$

Scanned with OKEN Scanner

806. Trecînd la coordonate sferice rezultă:

$$I = \iiint\limits_{\Delta} \frac{\rho^3 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}: \quad \Delta \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant R \end{cases}$$

Aşadar:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{R} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} = 4 \int_0^{R} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

pentru calculul integralei se face schimbarea de variabilă

$$\rho = a \operatorname{sh} t,$$

aşadar

$$R = a \operatorname{sh} T,$$

deci

$$I = 2\pi a^2 \left(\frac{sh2t}{2} - t \right)_0^T:$$

$$T = \ln\left(R + \sqrt{R^2 + a^2}\right) - \ln a$$

se obţine:

$$I = 2\pi R \sqrt{a^2 + R^2} - 2\pi a^2 \ln\left(R + \sqrt{R^2 + a^2}\right) + 2\pi a^2 \ln a,$$

dacă

$$a \to 0; \; a^2 \ln a \to 0,$$

deci

I are ca limită $I_0 = 2\pi R^2$.

807. Domeniul de integrare este compactul prismatic D definit de:

$$x + y + z - 3 \leqslant 0; \; x + y - 1 \leqslant 0; \; x \leqslant 1; \; x \geqslant 0; \; y \geqslant 0; \; z \geqslant 0,$$

aşadar:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{3-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx \, dy \, dz = \frac{51}{20}.$$

808. Domeniul de integrare este compactul D definit de

$$x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0; \; z \geqslant 0, \; z \leqslant a; \; y \geqslant 0,$$

aşadar

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz = \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx \, dy \, dz.$$

Trecînd la coordonate cilindrice rezultă:

$$\iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} \rho^2 z \, d\theta \, d\rho \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \, d\rho \int_0^a z dz = \frac{8a^3}{9}$$

809. Domeniul de integrare D este definit de

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqslant 0, \; z \geqslant 0, \text{ aşadar:}$$

$$\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dx = \iiint_D (x^2 + y^2) dx \, dy \, dz.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd la coordonate sferice rezultă:

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta \int_0^R \rho^4\,d\rho = \frac{4\pi R^5}{15}$$

810. $D: x^2+y^2+z^2-1 \leqslant 0;\quad x \geqslant 0;\quad y \geqslant 0;\quad z \geqslant 0.$
Trecînd la coordonate sferice se obține $I = \frac{\pi}{8}$.

811. Ecuația sferei în coordonate sferice este $\rho = \cos\theta$ deci:

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta \rho^3 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{10}.$$

812. $D: x^2+y^2-z^2 \leqslant 0;\ x^2+y^2+z^2-2 \leqslant 0;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;$ $z \geqslant 0$. Trecînd la coordonate sferice rezultă:

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^4\,d\rho = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

813. Se trece la coordonate sferice generalizate:

$x = a\rho\cos\varphi\sin\theta;\quad y = b\rho\sin\varphi\sin\theta;\quad z = c\rho\cos\theta,$ atunci

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho^2\,d\rho = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

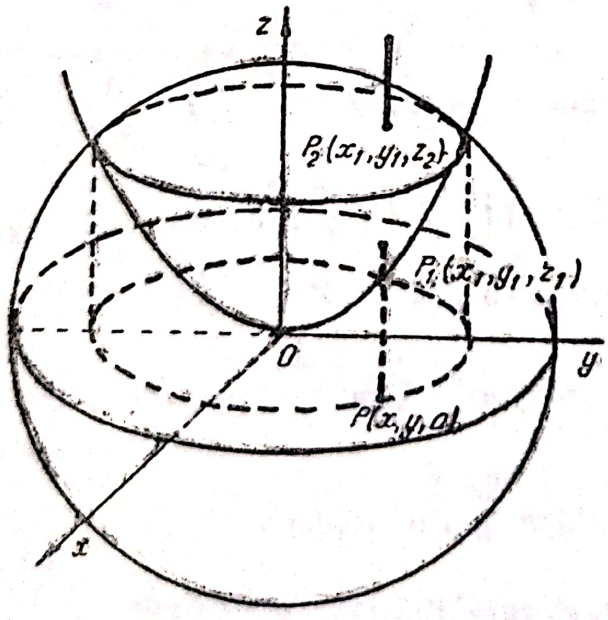

Fig. 42

814. Paraboloidul de rotație $x^2+y^2-az=0$ și sfera $x^2+y^2+z^2-2a^2=0$, se taie după cercul: $x^2+y^2-a^2=0\quad z=a$. Ecuațiile proiecției pe planul xOy ale cercului de secțiune sînt $x^2+y^2=a^2$ și $z=0$.

$$I = \iint_\Delta dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}} [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]\,dz$$

Δ este compactul din planul xOy definit de $x^2+y^2-a^2 \leqslant 0$.

Pentru calculul integralelor duble se trece la coordonate polare. Se obține $I = \frac{\pi a^5}{12}$.

Scanned with OKEN Scanner

815. În domeniul considerat avem: $x \geqslant 0$: $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Schimbarea de variabile:

$$x + y + z = u\,;\ \frac{y+z}{x+y+z} = v\,;\quad \frac{z}{y+z} = w.$$

Transformă tetraedrul dat în cubul $0 \leqslant u \leqslant 1$; $0 \leqslant v \leqslant 1$; $0 \leqslant w \leqslant 1$. Din relațiile de mai sus se deduce:

$$x = u(1-v)\,;\ y = uv(1-w)\,;\ z = uvw.$$

Calculul iacobianului se face ușor folosind o schimbare de variabilă intermediară:

$$x + y + z = \xi\,;\ y + z = \eta\,;\ z = \zeta.\ \text{Sau}\ x = \xi - \eta$$

$$y = \eta - \zeta\,;\ z = \zeta,\ \text{de unde}\ \zeta = u\,;\ \eta = uv\,;\ \zeta = uvw$$

deci:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \cdot \frac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(\mu,\nu,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

Integrala triplă devine:

$$I = \int_0^1 u^{p+q+r+2}(1-u)^s\,du \int_0^1 v^{q+r+1}(1-v)^p\,dv \int_0^1 w^r(1-w)^q\,dw,\ \text{deci}$$

$$I = B(p+q+r+3,\ s+1)\cdot B(q+r+2,\ p+1)\cdot$$

$$\cdot B(r+1,\ q+1)\ \text{sau}$$

$$I = \frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot \frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)}$$

Așadar:

$$I = \frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$$

816. Va trebui calculat volumul solidului comun elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ și conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Planele $z = \pm\frac{c}{\sqrt{2}}$ secționează cele două suprafețe după aceeași elipsă, de ecuații $\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$; $z = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Ea se proiectează în adevărata mărime pe planul xOy. Volumul solidului comun se compune din cele două conuri cu vîrful în a, la care se adaugă cele două calote de elipsoid. Deci $V = 2\iiint_D dx\,dy\,dz$.

D este compactul mărginit de con și elipsoid. Rezultă:

$$V = 2\iint_\Delta dx\,dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= 2c\iint_\Delta \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dx\,dy$$

Δ fiind compactul din planul xOy definit de $\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{2}} - 1 \leqslant 0$.

Pentru calcul se trece la coordonate polare generalizate $x = a\rho \cos\theta$; $y = b\rho \sin\theta$. Deci:

$$V = 2abc \iint (\sqrt{1-\rho^2} - \rho)\ \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\, d\rho - 2abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^2\, d\rho;$$

$$V = \frac{2\pi abc}{3}(2 - \sqrt{2})$$

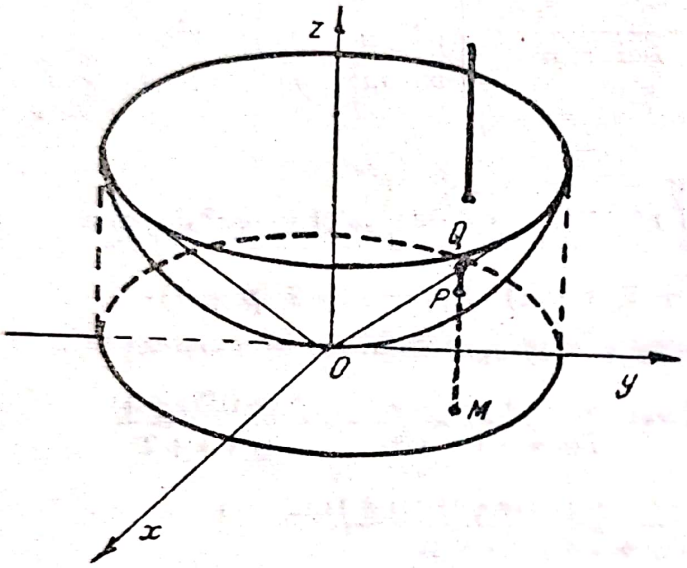

Fig. 43.

817. Paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$ și conul eliptic cu vîrful în origine $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$ se intersectează după elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$; $z = 2$, care se proiectează în adevărata mărime pe planul xOy.

Atunci

$V = \iiint_D dx\, dy\, dz$, unde D este domeniul cuprins între paraboloid și con.

Deci:

$$V = \iint_\Delta dx\, dy \int_{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}} dz =$$

$$= \iint_\Delta \left[\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right] dx\, dy$$

Δ este domeniul din planul xOy mărginit de elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} - 1 = 0$.

Se trece la coordonate polare generalizate $x = 4\rho\cos\theta$;

$y = 6\rho \sin\theta$; atunci $dx\, dy = 24\rho\, d\theta\, d\rho$

$$V = 48 \iint_\Delta (\rho^2 - \rho^3) d\theta\, d\rho = 48 \int_\theta^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 8\pi.$$

818. $V = \iiint_D dx\, dy\, dz$; D este domeniul mărginit de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, de conul $2xy = z^2$ și de planul xOy.

Deci:

$$V = \iint_\Delta dx\, dy \int_0^{\sqrt{2xy}} dz = \iint_\Delta \sqrt{2xy}\, dx\, dy$$

Δ este domeniul din planul xOy mărginit de bucla lemniscatei $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$, situată în regiunea pozitivă a axelor de coordonate.

$$V = \iint_{\Delta'} \rho^2 \sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \rho^2\, d\rho = \frac{\pi a^3}{12}.$$

819. Prima suprafață este un paraboloid de rotație în jurul axei Oz, a doua este un con hiperbolic. Proiecția curbei de intersecție dintre cele două suprafețe pe planul xOy este

$$(x^2 + y^2)^2 = xy.$$

Atunci:

$V = \iiint_D dx\, dy\, dz$, D este domeniul mărginit de paraboloid și con și care se proiectează pe planul xOy în interiorul buclei lemniscatei situată în regiunea pozitivă a axelor de coordonate. Așadar:

$$V = \iint_\Delta dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{xy}} dz = \iint_\Delta \left[\sqrt{xy} - (x^2 + y^2)\right] dx\, dy.$$

este domeniul închis de prima buclă a lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Trecînd la coordonate polare rezultă:

$$V = \iint_\Delta \rho^2 \sqrt{\sin\theta \cos\theta}\, d\theta\, d\rho - \iint_\Delta \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{192}.$$

820. $V = \iiint_D dx\, dy\, dz = 2 \iint_\Delta \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy$

Δ este compactul definit de $x^2 + y^2 - a^2 < 0$ se trece la coordonate polare se obține $V = \frac{16a^3}{3}$.

821. Pentru generarea suprafeței vezi problema 785. Se determină ecuația suprafeței în coordonate sferice (Fig. 44)

$OC = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle MCD = \pi - 2\theta$;

din ΔOCM rezultă

$\frac{\rho}{\sin 2\theta} = \frac{a}{2\cos\theta}$ deci $\rho = a \sin\theta$

$$V = \iiint_D \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a\sin\theta} \rho^2\, d\rho = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

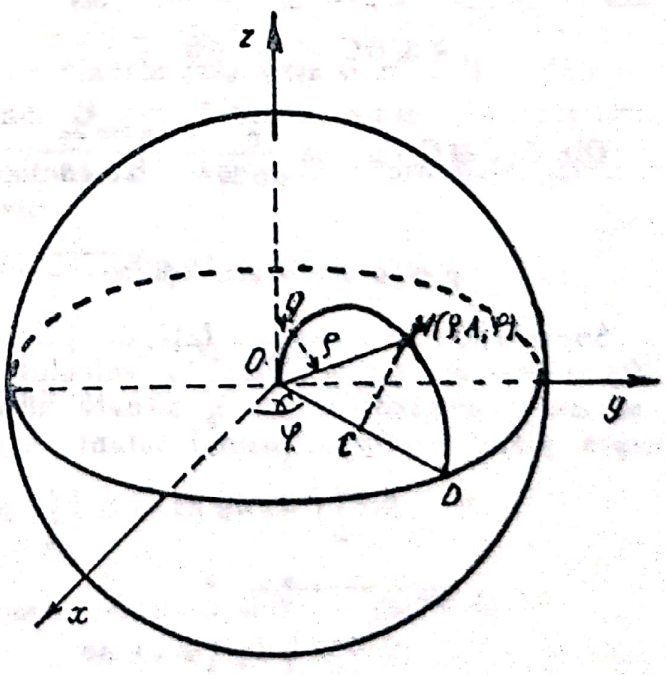

Fig. 44.

822. Pentru generarea suprafeței vezi problema 787. Se determină ecuația suprafeței în coordonate sferice. Fie triedul $x\theta yz$ de coordonate și

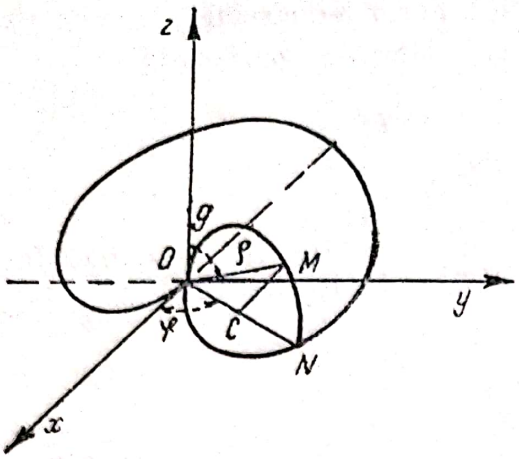

Fig. 45.

$= a(1 - \cos\varphi)$, ecuaţia cardioidei din planul xOy, secţiunea suprafeţei prin planul xOy. Se consideră cercul de diametru ON, al cărui plan trece prin axa Oz, acest cerc aparţine suprafeţei. Poziţia punctului M pe acest cerc şi deci pe suprafaţă este determinată de parametri ρ, θ, φ care sînt coordonatele sferice ale punctului M. Avem $\sphericalangle MOC = \frac{\pi}{2} - \theta$, ΔOCM este isoscel (Fig. 45). $\sphericalangle MCN = 2\sphericalangle MOC$ sau $\sphericalangle MCN = \pi - 2\theta$. $ON = r = a(1 - \cos\varphi)$; $OC = \frac{a}{2}(1 - \cos\varphi)$. Din ΔOCM rezultă: $\frac{\rho}{\sin 2\theta} = \frac{\frac{a}{2}(1-\cos\varphi)}{\cos\theta}$; $\rho = a(1 - \cos\varphi)\sin\theta$. Suprafaţa fiind simetrică faţă de planul xOy se calculează volumul situat deasupra planului xOy. Deci:

$$V = 2\iiint_D dx\,dy\,dz; \quad V = 2\iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a(1-\cos\varphi)\sin\theta} \rho^2\, d\rho = \frac{5\pi^2 a^3}{8}.$$

823. Suprafaţa este generată de cercuri ale căror plane trec prin axa Oz şi au ca diametru raza vectoare a unui punct curent de pe rozeta cu patru foi $r = a\sin 2\varphi$ (Fig. 46)

$OC = CM = \frac{a}{2}\sin 2\varphi$, $\sphericalangle MCN = \pi - 2\theta$;

$$\sphericalangle MOC = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Din Δ OMC rezultă $\frac{\rho}{\sin 2\theta} = \frac{a\sin 2\varphi}{2\cos\theta}$,

deci

$$\rho = a\sin\theta\sin 2\varphi.$$

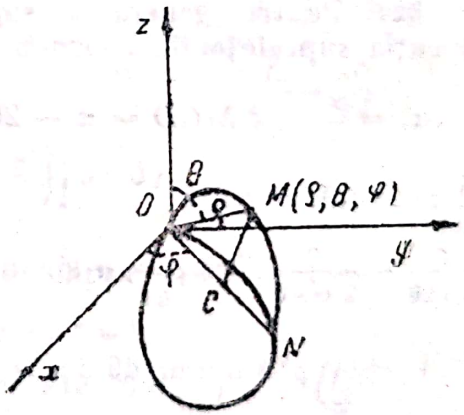

Fig. 46.

Suprafaţa este simetrică faţă de planul xOy şi prezintă patru bucle. Se calculează volumul jumătăţii de buclă situată deasupra planului xOy în primul octant. Aşadar:

$$V = 8\iiint_D dx\,dy\,dz = 8\iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi, \text{ deci}$$

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a\sin\theta\sin\varphi} \rho^2\, d\rho = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

824. Suprafaţa se află în faţa planului yOz. Secţiunile făcute prin planele $x = -h$ sînt imaginare. Secţionînd prin planul $z = 0$ se obţine curba $(x^2 + y^2)^2 = a^3x$ sau în coordonate polare $r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$ o curbă închisă simetrică faţă de axa polară şi situată de aceeaşi parte a axei Oy. Secţionînd suprafaţa prin planul xOz se obţine curba $(x^2 + z^2)^2 = a^3x$, o curbă identică cu curba de secţiune prin planul xOy. Suprafaţa este generată din rotirea curbei $(x^2 + y^2)^2 = a^2x$; $z = 0$ în jurul axei Ox. Din cauza simetriei se calculează volumul mărginit de suprafaţă situat în primul octant al axelor şi se amplifică cu 4.

$$V = 4\iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 \, d\rho = \frac{\pi a^3}{3}.$$

825. Suprafaţa are puncte reale pentru $xyz > 0$, a fiind presupus pozitiv. Deci suprafaţa închide o regiune din primul octant al axelor de coordonate. Suprafaţa conţine regiuni simetrice ale primei regiuni faţă de axele Ox, Oy şi Oz. Ea se compune din patru porţiuni egale între ele. Ecuaţia suprafeţei în coordonate sferice este $\rho = a \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi$ deci:

$$V = 4\iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{a\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{a^3}{360}.$$

826. Se va cerceta forma suprafeţei. Secţionînd suprafaţa prin planul $z = 0$ se obţine cercul $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. Secţionînd suprafaţa prin planul $x = 0$ se obţine $(y^2 + z^2)^2 = a^2(y^2 - z^2)$, $z = 0$, adică o lemniscată Bernoulli. Secţiunea prin planul $y = 0$ este tot o lemniscată. Suprafaţa este generată din rotirea lemniscatei $(y^2 + z^2) = a^2(y^2 - z^2)$, $x = 0$ în jurul axei Oz. Suprafaţa este simetrică faţă de planele xOy, yOz şi zOx. Rezultă:

$V = 8\iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$, unde D este domeniul situat în interiorul suprafeţei aparţinînd primului octant al axelor de coordonate. Ecuaţia suprafeţei în coordonate sferice este

$\rho = a\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$. Aşadar,

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta}} \rho^2 \, d\rho$$

deci

$$V = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \, d\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru calculul integralei $\int \sin\theta\cdot(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cdot\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}\,d\theta$ se face schimbarea $t=\cos\theta$ și integrala devine $\int(2t^2-1)\sqrt{1-2t^2}\,dt$ se face schimbarea $t=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$ se obține funcția primitivă:

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2}\arcsin(\sqrt{2}\cos\theta)+2\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{1-2\cos^2\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\sqrt{1-2\cos^2\theta}\,(1-4\cos^2\theta)\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\theta\,(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{3\pi}{4},$$

așadar

$$V=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

827. Se cercetează forma suprafeței. Secționînd cu planul $z=0$, se obține $(x^2+y^2)^2=0$. Suprafața este secționată de planul xOy în punctul O. Suprafața este tangentă în origine la planul xOy. Secționînd prin planul $y=0$, se obține $x^4+z^4=a^3z$. Trecînd la coordonate polare în planul xOz, $x=r\cos\theta$; $z=r\sin\theta$ se obține curba $r=a\sqrt[3]{\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$; curbă simetrică față de axa Oz, ea prezintă o buclă situată deasupra axei Ox. Secționînd prin planul $x=0$, se obține $y^4+z^4=a^3z$ aceeași curbă ca în planul xOz. Suprafața este generată din rotirea curbei $y^4+z^4=a^3z$; $x=0$ în jurul axei Oz. Ecuația suprafeței în coordonate sferice este:

$$\rho=a\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}$$

se calculează volumul mărginit de suprafață situat în primul octant al axelor și se amplifică cu 4. Așadar:

$$V=4\iiint_D\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

deci

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,d\theta \text{ pentru } \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}$$

face schimbarea $\operatorname{tg}\theta=t$ se obține $V=\frac{\pi^2a^3}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

328. Secțiuni reale în suprafață se obțin numai pentru $x > 0$. Suprafața este situată în fața planului yOz și este simetrică față de planele xOy și yOz, se calculează volumul cuprins în interiorul suprafeței situate în primul octant al axelor. Se trece la coordonate sferice generalizate.

$x = a\rho \cos\varphi \sin\theta$; $y = b\rho \sin\varphi \sin\theta$; $z = c\rho\cos\theta$, se obține $\rho = \sqrt[3]{a\cos\varphi \sin\theta}$, deci

$$V = 4abc \iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\sqrt[3]{a\cos\varphi\sin\theta}} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{\pi a^2 bc}{3}.$$

329. Suprafața are puncte numai în regiunea pozitivă a axei Oy și este simetrică față de planele xOy și yOz. Se trece la coordonate sferice generalizate și rezultă:

$$\rho = \frac{a^2 b}{h^3} \cos^2\varphi \sin\varphi \sin^3\theta, \text{ ecuația suprafeței.}$$

Atunci:

$$V = 4abc \iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{a^2 b}{h^3}\cos^2\varphi \sin\varphi \sin^2\theta} \rho^2 \, d\rho, \; D \text{ fiind}$$

domeniul mărginit de suprafață și situată în primul octant al axelor. Așadar:

$$V = \frac{4a^7 b^4 c}{3h^9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{192} \frac{a^7 b^4 c}{h^9}$$

330. Suprafața este formată dintr-o buclă situată în primul octant al axelor de coordonate și din simetricele acestei bucle față de axele de coordonate. Se calculează volumul inclus de o buclă și se amplifică cu 4. Trecînd la coordonate sferice se obține:

$$\rho = \frac{1}{h} \sqrt[3]{\frac{abc \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta}{\sin^6\theta + \cos^6\theta}}$$

$$V = 4abc \iiint_D \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{1}{h}\sqrt[3]{\frac{abc \sin\varphi\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{\sin^6\theta+\cos^6\theta}}} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{4a^3 b^3 c^3}{3h^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta\cdot\cos\theta \, d\theta}{\sin^6\theta + \cos^6\theta}. \text{ Dar } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta\cdot\cos\theta}{\sin^6\theta+\cos^6\theta} \, d\theta \text{ se transformă în}$$

$\int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{t^6+1}$ prin substituția $\operatorname{tg}\theta = t$. $\int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{t^6+1}$ se transformă într-o funcție euleriană prin schimbarea $t^6 = \frac{u}{1-u}$.

Se obține :

$$\int_0^\infty \frac{t^3 dt}{t^6+1} = \frac{1}{6} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

deci

$$V = \frac{2a^3b^3c^3}{9\sqrt{3}h^3}.$$

831. Se folosesc coordonatele sferice de tipul cel mai general (vezi vol. I) $x = a\rho \sin^4\theta \cos^4\varphi$,

$$y = b\rho \sin^4\theta \sin^4\varphi, \quad z = c\rho\cos^4\theta. \text{ Deci : } \frac{D(x, y, z)}{D(\theta, \rho, \varphi)} =$$

$$= 16abc\,\rho^2 \sin^7\theta \cos^3\theta \cos^3\varphi \sin^3\varphi.$$

$$V = 16abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cos^3\theta\, d\theta \int_0^{} \rho^2\, d\rho = \frac{abc}{90}.$$

832. Solidul limitat de suprafețele date are pe Oz ca axă de simetrie. Cele două suprafețe se taie după cercul $x^2 + y^2 = 2a^2$ și $z = a$ care se proiectează pe planul xOy după cercul $x^2 + + y^2 = 2a^2$; $z = 0$.

$$x_G = 0 ; y_G = 0 ; z_G = \frac{\iiint_D z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D dx\,dy\,dz} = \frac{5a(6\sqrt{3}+5)}{83}.$$

833. $x_G = -\frac{1}{2}$; $y_G = -\frac{1}{2}$; $z_G = \frac{5}{6}$.

834. $x_G = \frac{3R}{16}(2+\sqrt{2})$; $y_G = 0$; $z_G = 0$.

835. Ecuația suprafeței în coordonate sferice este :

$$\rho = a \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi.$$

$$x_G = \frac{\iiint_D x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D dx\,dy\,dz} ; \iiint_D x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_\Delta \rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{a\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi} \rho^3\, d\rho.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar :

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}\theta\cos^4\theta\,d\theta.$$

Pentru calculul $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}\theta\cos^4\theta\,d\theta$ se trece la funcţii euleriene prin schimbarea de variabilă $\sin\theta = \sqrt{t}$.
Avem :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}\theta\ \cos^4\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)};\ \Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1\cdot3}{2^3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(8) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\ ;\ \text{şi}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

deci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{9\pi}{4\,096}\ ;\ \text{cum}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi = \frac{8}{315}\ \text{şi}\ \iiint_D dx\,dy\,dz = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{12}$$

(v. problema 825).

Rezultă $x_G = \frac{9a\pi}{448}$; analog pentru y_G şi z_G.

836. $I_{oz} = \iiint_D (x^2+y^2)\,dm$, unde $dm = \mu\,dx\,dy\,dz$, μ fiind densitatea.

Dacă $\mu = 1$, $I_{oz} = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ unde D este domeniul mărginit de suprafaţa torului. Se calculează coordonatele unui punct M din interiorul torului (Fig. 47), folosind următorii parametrii : $\sphericalangle xOc = \varphi$, $\sphericalangle M'CM = \theta$ şi $CM = \rho$. Se ştie că $OC = a$. Se va exprima vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului M cu ajutorul versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ şi al parametrilor φ, θ, ρ.

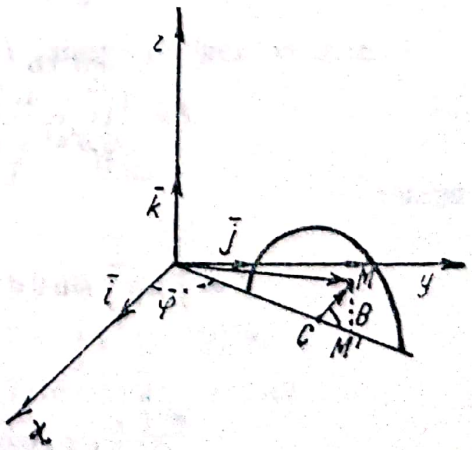

Fig. 47.

De pe figură rezultă :

$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM'} + \overline{M'M}$

$\overline{OC} = a\cos\varphi\,\bar{i} + a\sin\varphi\,\bar{j}$; $|CM' = \rho\cos\theta$,

aşadar

$$\overline{CM'} = \rho \cos\theta \cos\varphi\, \bar{i} + \rho \cos\theta \sin\psi\, \bar{j}$$
$$\overline{MM'} = \rho \sin\theta\, \bar{k}$$

Aşadar:

$$\bar{r} = (a + \rho\cos\theta)\cos\varphi\, \bar{i} + (a + \rho\cos\theta)\sin\varphi\, \bar{j} + \rho\sin\theta\, \bar{k}.$$

Rezultă:

1) $x = (a + \rho\cos\theta)\cos\varphi$; $y = (a + \rho\cos\theta)\sin\varphi$; $z = \rho\sin\theta$.

Se ecectuează în integrala triplă de mai sus schimbarea de variabile definită de ecuaţiile (1).

Iacobianul transformării este:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho(a + \rho\cos\theta).$$

Aşadar:

$$I_{oy} = \iiint_D (a + \rho\cos\theta)^3\, d\rho\, d\theta\, d\varphi;\quad D:\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$
$$0 \leqslant \rho \leqslant \rho\ \mathrm{r}.$$

Rezultă:

$$I_{oz} = \frac{\pi^2 a r^2}{2}(4a^2 + 3r^2).$$

837. Suprafaţa este situată deasupra planului xOy. Se obţin secţiuni reale prin planele $z = k$, $k \leqslant 0$. Ecuaţia suprafeţei în coordonate sferice este:

$$\rho = a\sin\theta \sqrt[3]{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

aşadar

$$V = \iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \iint_\Delta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int_0^{a\sin\theta\sqrt[3]{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi}} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi a^3}{288}.$$

Pentru calculul integralei I se trece la coordonate sferice:

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_\Delta \rho\sin\theta\, d\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

aşadar

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a\sin\theta\sqrt[3]{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi}} \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin_4\varphi\cos^4\varphi}\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \sqrt[3]{\sin^2\theta\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^4\varphi\cos^4\varphi}\,d\varphi \quad \text{și} \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\sqrt[3]{\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta.$$

Pentru calculul lui I_1 se face schimbarea $\sin^2\varphi = t$ și pentru I_2 schimbarea $\sin^2\theta = t$.

Se obține

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1}{6}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{32}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{4}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{3};\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{6}\right)}$$

Dar

$$\Gamma\left(\frac{19}{6}\right) = \frac{91}{216}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \text{ deci } I_1 = \frac{48}{91}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}$$

$$I = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{48}{91}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)};$$

$$I = \frac{3}{91}\cdot\frac{a^2}{4}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \text{ sau } I = \frac{3}{91}\cdot\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}};$$

deci

$$I = \frac{3\pi a^2}{182}.$$

838. Se ia ca patrat $D = [0, a]^2$, atunci:

$$I = \iiint_{R^3} f_1(x, y)f_2(x, z)\,f_3(y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy\int_0^a f_2(x, z)\,f_3(y, z)dz.$$

Inegalitatea lui Schwartz conduce la:

$$\left[\int_0^a f_2(x, z)\,f_3(y, z)dz\right]^2 \leqslant \int_0^a [f_2(x, z)]^2dz \times \int_0^a [f_3(y, z)]^2dz =$$

$= \varphi(x) \times \psi(y)$, funcțiile fiind continui, deci integrabile rezultă:

$$I^2 \leqslant \left[\iint_D |f_1(x, y)|\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\psi(y)}\,dx\,dy\right]^2$$

Scanned with OKEN Scanner

dar

$$\iint_D |f_1(x,\ y)|\ \sqrt{\varphi(x)}\ \sqrt{\psi(y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a \sqrt{\varphi(x)}\,dx \int_0^a |f_1(x,\ y)|\ \sqrt{\psi(y)}\,dy.$$

Se aplică din nou inegalitatea lui Schwartz ultimei integrale:

$$\left(\int_0^a |f_1(x,\ y)|\ \sqrt{\psi(y)}\,dy\right)^2 \leqslant \int_0^a f_1^2(x,\ y)dy \times \int_0^a \psi(y)dy$$

Se notează

$$I_k = \iint_D f_k^2(x,\ y)dx\,dy,\ \text{fie}\ \int_0^a \psi(y)dy = I_3$$

$$I^2 \leqslant \left[\int_0^a \varphi(x)\left(\int_0^a f_1^2(x,\ y)\right)^{\frac{1}{2}} dx\right]^2 \times I_3$$

și prin urmare, printr-o nouă aplicare a inegalității lui Schwarz rezultă:

$$I^2 \leqslant \int_0^a \varphi(x)dx \times \iint_D f_1^2(x,\ y)dx\,dy \times I_3 = I_1 \times I_2 \times I_3.$$

839. În domeniul D, $x^2 - y^2 \geqslant 0$, funcția este deci majorată de 1; singurele puncte de discontinuitate sînt punctele ($z = 0$, $x = y$), adică originea și punctele segmentului ($z = 0$, $x = y$, $1 \leqslant x \leqslant 2$) este o mulțime neglijabilă, integrala este deci definită. Vom integra în primul rînd în raport cu z

$$I = \iint_\Delta dx\,dy \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{z^2 + x^2 - y^2}\right) dz =$$

$$= \iint_\Delta \left(2\sqrt{x^2 - y^2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) dx\,dy$$

unde $\Delta = \{(x,\ y)|\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2.\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

Sîntem conduși la a compara x și x^2, deci a împărți pe Δ în două domenii:

$$\Delta_1 = \{(x,\ y)|,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$$

$$\Delta_2 = \{(x,\ y)|,\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$$

I este atunci suma a două integrale I_1 și I_2

$$I_1 = \frac{4 - \pi}{2} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}\,dy =$$

$$= \frac{4 - \pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} \arcsin x + \frac{x^3}{2}\sqrt{1 - x^2}\right) dx = \frac{4 - \pi}{2}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{2}{45}\right)$$

$$I_2 = \frac{4 - \pi}{2} \int_1^2 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = \frac{4 - \pi}{2} \int_1^2 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{7\pi(4 - \pi)}{24}.$$

840. Domeniul este limitat de o sferă de centru O și de două conuri de vîrf O, ceea ce sugerează folosirea coordonatelor sferice.

Imaginea domeniului este atunci definită prin

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ \sin\varphi \geqslant 0,\ \ \rho^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi) \leqslant 0$$

$$\rho^2(\cos^2\varphi - k^2\sin^2\varphi) \geqslant 0, \text{ de unde}$$

$$I_k = \int_0^1 \rho^2\,d\rho \iint_\Delta \sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

unde Δ este definit prin $\sin^2\theta \leqslant 2\cos\theta\operatorname{tg}\varphi$ (ceea ce necesită $\cos\theta > 0$) și $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{1}{k}$. Prin urmare

$$I_k = \frac{1}{3}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta \int_\beta^\gamma \sin\varphi\,d\varphi$$

α, β și γ fiind definiți prin $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \leqslant \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{k}$,

$\sin^2\alpha = \frac{2}{k}\cos\alpha$, adică :

$$I_k = \frac{1}{3}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(\frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta} - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)d\theta.$$

Schimbarea de variabilă $u = \sin\theta$ și o descompunere în elemente simple conduce la :

$$I_k = \frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin\alpha}{\sqrt{2}-\sin\alpha}\right) - \frac{2k\alpha}{\sqrt{1+k^2}}\right]$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{k^2+1}-1}{k} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}+1}: \text{ deci } \lim_{k\to 0}\alpha = \frac{\pi}{2}$$

și

$$\lim_{k\to 0} I_k = \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

CAPITOLUL XIII

ANALIZA VECTORIALĂ

FORMULE INTEGRALE

841. $d\Phi = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})\cdot\bar{n}\,d\sigma$; dar $\bar{n} = \frac{p\bar{i}+q\bar{j}-\bar{k}}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$

cum $\cos\gamma > 0$; $\bar{n} = \frac{-p\bar{i}-q\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$: $d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$

Scanned with OKEN Scanner

$$d\Phi = (-px - qy + z)dx\,dy, \text{ dar } z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad q = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \text{ deci } d\Phi = (z + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy$$

aşadar

$$d\Phi = dx\,dy; \quad \Phi = \iint_D dx\,dy; \quad D: \{x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0 : (x, y) \in R^2\}$$

Rezultă : $\Phi = \pi$.

842. $d\Phi = (x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k})\cdot\bar{n}\,d\sigma$, dar $x = \cos u \sin v$; $y = \sin u \sin v$; $z = \cos v$; integrarea efectuîndu-se pe faţa exterioară a sferei rezultă : $\bar{n} = \sin v \cos u\bar{i} + \sin v \sin u\bar{j} + \cos v\bar{k}$; $d\sigma = \sin v\,du\,dv$, aşadar :

$$d\Phi = \cos^3 u \sin^4 v\,du\,dv + \sin^3 u \sin^4 v\,du\,dv + \cos^3 v \sin v\,du\,dv$$

$$\Phi = \iint_\Delta \cos^3 u \sin^4 v\,du\,dv + \iint_\Delta \sin^3 u \sin^4 v\,du\,dv +$$

$$+ \iint_\Delta \cos^3 v \sin v\,du\,dv$$

$$\Delta: \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant v \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \text{ deci } \Phi = \frac{3\pi}{8}$$

843. Se notează cu Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ fluxurile prin suprafeţele OBC, OAC, OAB şi ABC, rezultă :

$$d\Phi_1 = -(y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k})\cdot\bar{i}\,dy\,dz = -y\,dy\,dz; \quad \Phi_1 = -\iint_{OBC} ydy\,dz$$

$$\Phi_1 = -\int_0^a ydy \int_0^{a-y} dz = -\frac{a^3}{6}; \text{ analog se obţine } \Phi_2 = -\iint_{OAC} zdx\,dz$$

$$\Phi_2 = -\frac{a^3}{6} \text{ şi } \Phi_3 = -\iint_{AOB} xdx\,dy; \quad \Phi_3 = -\frac{a^3}{6}, \text{ aşadar}$$

$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -\dfrac{a^3}{2}$. Dacă $\bar{n}$ este vectorul unitate purtat pe normala exterioară, la planul ABC avem $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}$.

Ecuaţia planului ABC fiind $x + y + z = a$, se trece la forma parametrică $x = u$, $y = v$; $z = a - u - v$; $d\sigma = \sqrt{3}\,du\,dv$.

Aşadar :

$$d\Phi = \bar{V}(M)\cdot\bar{n}\,d\sigma = (y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k})\cdot(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})du\,dv$$

$$d\Phi = a\,du\,dv; \quad \Phi = a\int_0^a du \int_0^{a-u} dv = \frac{a^3}{2}, \text{ deci}$$

$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi = 0$. Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski rezultatul se obţine imediat, deoarece div $\bar{V}(M) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

844. Se aplică formula lui Stokes $\oint_C \bar{V}\cdot d\bar{r} = \iint_S \operatorname{rot}\bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma$.

unde $\bar{V} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$; $\operatorname{rot}\bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$

$\bar{n}\,d\sigma = dy \wedge dz\bar{i} + dz \wedge dx\bar{j} + dx \wedge dy\bar{k}$, aşadar

$$\oint_C \bar{V}\cdot d\bar{r} = -\iint_S dy \wedge dz\bar{i} + dz \wedge dx\bar{j} + dx \wedge dy\bar{k}$$

S reprezentînd faţa de deasupra planului cercului dat, deci

$\cos\gamma > 0$; $\cos\gamma = \frac{-1}{-\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $z = -x - y$; $p = -1$; $q = -1$; aşadar

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad d\sigma = \sqrt{3}\,dx\,dy$$

$dy \wedge dz = d\sigma\cos\alpha = dx\,dy$; $dz \wedge dx = d\sigma\cos\beta = dx\,dy$

$dx \wedge dy = d\sigma\cos\gamma = dx\,dy$, rezultă:

$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dy = -3\iint_D dx\,dy$, unde D este compactul mărginit de elipsa $x^2 + xy + y^2 = \frac{a^2}{2}$; reducînd ecuaţia elipsei la forma canonică se obţine $\frac{x^2}{\frac{a^2}{3}} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Pentru calculul integralei duble se face schimbarea de variabile $x = \frac{a}{\sqrt{3}}\rho\cos\theta$; $y = a\rho\sin\theta$, $dx\,dy = \frac{a^2}{\sqrt{3}}\rho\,d\theta\,d\rho$ deci

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -a^2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\,d\rho = -\pi a^2\sqrt{3}.$$

845. $\bar{V} = (z-y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}$

$\operatorname{rot}\bar{V} = 2(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$; se obţine

$$\int_{ABC} \bar{V}\cdot d\bar{r} = \iint_{S(ABC)} \operatorname{rot}\bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 2\iint_{S(ABC)} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy.$$

Integrala se efectuează pe faţa de deasupra planului

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$; se obţine $\cos\alpha = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$;

$\cos\beta = \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$; $\cos\gamma = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. Ecuaţiile parametrice ale planului sînt $x = u$; $y = v$; $z = c\left(1 - \frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)$; $d\sigma = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{ab}\,du\,dv$.

Aşadar

$$2\iint_{S(ABC)} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy = \frac{2(ab+bc+ca)}{ab}\iint_{OAB} du\,dv =$$

$$= ab + bc + ac$$

Scanned with OKEN Scanner

846. Se aplică formula lui Stokes. $\operatorname{rot} \bar{V} = -2(z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k})$

$$\bar{n}\, d\sigma = dy \wedge dz\bar{i} + dz \wedge dx\bar{j} + dx \wedge dy\bar{k}, \text{ aşadar}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{V} \cdot d\bar{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma = -2 \iint_{S} z dy \wedge dz + x dz \wedge dz + y dx \wedge dy$$

S fiind porţiunea din suprafaţa sferei mărginite de curba lui Viviani. Integrarea se face pe faţa exterioară a sferei deci:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy; \quad dy \wedge dz = d\sigma \cos\alpha = -p\, dx\, dy$$

$$dz \wedge dx = d\sigma \cos\beta = -q\, dx\, dy; \quad dx \wedge dy = d\sigma \cos\gamma = dx\, dy$$

Aşadar

$$-2 \iint_{S} z dy \wedge dz + x\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy = 2 \iint_{D} (pz + qx - y) dx\, dy$$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \quad q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \text{ şi rezultă}$$

$$2 \iint_{D} (pz + qx - y) dx\, dy = -2 \iint_{D} \left(x + y + \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx\, dy$$

unde D: $x^2 + y^2 - ax \leqslant 0$. Rezultă dacă se notează cu I valoarea integralei:

$$I = -2 \iint_{D} (x + y) dx\, dy - 2 \iint_{D} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

se obţine $I = -\frac{\pi a^3}{4}$, a doua integrală dublă fiind nulă.

847. 1) Dacă ρ este raza discului de secţiune făcută în zona sferică de mai sus printr-un plan paralel cu planul xOy, de cotă z; atunci ρ este dat de $\rho^2 = z(a+b) - z^2 - ab$.

Aria discului de secţiune este $S(z) = \pi[z(a+b) - z^2 - ab]$ atunci volumul μ este

$$\mu = \pi \int_{h}^{b} [z(a+b) - z^2 - ab] dz = \frac{1}{6} \pi (b-h)^2 (b + 2h - 3a).$$

2) Măsura algebrică a protecţiei lui $\bar{V}(M)$ pe normala orientată la D este $-h$, de unde: $\Phi_0 = -h \times$ aria $D = -\pi h(h-a)(b-h)$.

Suma $\Phi + \Phi_0$ fluxului lui $\bar{V}(M)$ prin suprafaţa închisă $S \cup D$ orientată către exterior, este egală cu integrala triplă a divergenţei lui $\bar{V}(M)$. Dar $\operatorname{div} \bar{V}(M) = 3$, prin urmare

$$\Phi + \Phi_0 = 3\mu$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \pi (b-h)^2 (b + 2h - 3a) + \pi h(h-a)(b-h)$$

$$\Phi = \frac{\pi(b-h)}{2} [(b+h)(a+b) - 4ab]$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Fluxul Φ este integrala pe S a formei exterioare

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

$$\omega = (x\,dy - y\,dx) \wedge dz + z\,dx \wedge dy$$

Schimbarea de variabile indicată conduce la noua expresie:

$$\omega = r^2\,d\theta \wedge dz + zr\,dr \wedge d\theta$$

Pe suprafaţa S: $r^2 = (z-a)(b-z)$, $rdr = \left(-z + \frac{a+b}{2}\right)dz \wedge d\theta$

$$\omega = (z-a)(b-z)d\theta \wedge dz + z\left(-z + \frac{a+b}{2}\right)dz \wedge d\theta$$

$$\omega = \left[(z-a)(z-b) - z\left(-z + \frac{a+b}{2}\right)\right]d\theta \wedge dz$$

$\omega = \left[z\left(\frac{a+b}{2}\right) - ab\right]d\theta \wedge dz$. Suprafaţa S este imaginea dreptunghiului X; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; $h \leqslant z \leqslant b$.

Fluxul Φ are ca valoare:

$$\Phi = \iint_X \left[z\frac{a+b}{2} - ab\right]d\theta \wedge dz = 2\pi \int_h^b \left[z\frac{a+b}{2} - ab\right]dz =$$

$$= 2\pi\left[\frac{z^2}{4}(a+b) - abz\right]_h^b = \frac{\pi}{2}(b-h)\,[(b+h)(a+h) - 4ab]$$

848. $\bar{V} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$; $\bar{n}\,d\sigma = dy \wedge dz\bar{i} + dz \wedge dx\bar{j} + dx \wedge dy\bar{k}$

$$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\bar{V}\,dv, \text{ dar } \operatorname{div}\bar{V} = 3(x^2+y^2+z^2),$$

aşadar

$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$, trecînd la coordonate sferice $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\theta$, rezultă:

$$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 3\iiint_\Delta \rho^4\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi;\ \Delta: \begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant a \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

deci:

$$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^a \rho^4\,d\rho = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

849. $\iint_S (x^2\alpha + y^2\beta + z^2\gamma)d\sigma = \iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\bar{V}\,dx\,dy\,dz$ dar $\operatorname{div} V = 2(x+y+z)$, deci $\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 2\iiint_V (x+y+z)dx\,dy\,dz$.

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd la coordonate sferice rezultă:

$$\iint_{\Sigma} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 2\iiint_{V} (\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Delta: 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4};\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{h}{\cos\theta}$$

$$\iint_{S} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\frac{h}{\cos\theta}} \rho^3\,d\rho = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

850. $\bar{V} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$, cum $\operatorname{div}\bar{V} = 0$, rezultă că:

$$\iint_{S} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 0.$$

851. $\iint_S \operatorname{grad} u\cdot\bar{n}\,d\sigma = \iiint_D \Delta u\,dx\,dy\,dz$

$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$; $u(x, y, z)$ fiind de clasă C^2 în compactul D, mărginit de suprafața închisă S.

852. $V = x^2yz\bar{i} + xy^2z\bar{j} + xyz^2\bar{k}$; $\operatorname{div}\bar{V} = 6xyz$, așadar

$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 6\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$; trecînd la coordonate sferice rezultă:

$$\iint_{S} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 6\iiint_{\Delta} \rho^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Delta: 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant \rho \leqslant a$$

așadar

$$\iint_{S} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{a} \rho^5\,d\rho = \frac{a^6}{8}.$$

853. $V = x^3\bar{i} + x^2y\bar{j} + x^2z\bar{k}$; $\operatorname{div}\bar{V} = 5x^2$; așadar

$\iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 5\iiint_D x^2\,dx\,dy\,dz$, trecînd la coordonate cilindrice rezultă:

$$\iint_{S} \bar{V}\cdot\bar{n}\,d\sigma = 5\iiint_{\Delta} \rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta\,dz = \frac{5\pi a r^4}{4}$$

$$\Delta: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant r;\ 0 \leqslant z \leqslant a$$

854. 1) Se notează: $I = \iint_S [\alpha x(z^2 - y^2) + \beta y(x^2 - z^2) + \gamma z(y^2 - x^2)\,d\sigma$ integrala fiind întinsă la o porțiune S a suprafeței orientate marginite de o curbă închisă Γ; α, β, γ sînt cosinusurile directoare ale normalei orientate la S.

Se mai poate scrie $I = \iint_S \omega$ unde

$$\omega = x(z^2 - y^2)dy \wedge dz + y(x^2 - z^2)dz \wedge dy + z(y^2 - x^2)dx \wedge dy$$

este o formă diferențiată exterioară de ordinul 2. Se verifică că diferențierea exterioară a lui ω este nulă, adică vectorul $\bar{V} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$ are divergența nulă. Există deci o formă liniară

$$\bar{\omega} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

pentru care ω este diferențiala exterioară, și avem:

$$\iint_S d\omega = \int_\Gamma \bar{\omega}$$

cu alte cuvinte, există un vector de componente X, Y, Z al cărui rotor este egal cu vectorul dat:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = x(z^2 - y^2) = xz^2 - xy^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = y(x^2 - z^2) = yx^2 - yz^2$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = z(y^2 - x^2) = zy^2 - zx^2$$

se observă un sistem evident de soluții scriind

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = xz^2 \quad \frac{\partial X}{\partial z} = xy^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = yx^2 \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = yz^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = zy^2 \quad \frac{\partial X}{\partial y} = zx^2.$$

Se obține $X = x^2yz$; $Y = y^2zx$; $Z = z^2xy$, de unde

$$I = \int_\Gamma xyz(xdx + ydy + zdz) = \frac{1}{2}\int_\Gamma xyz\,d\rho^2;\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

2) Se orientează normala la S către x crescător. Curba Γ limitînd suprafața S va fi orientată în sensul săgeții.

Folosind integrala de suprafață avem: $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\gamma = 0$.

$I = \iint_S (z^2 - y^2)d\sigma$, această integrală se calculează ușor în coordonate polare

$$y = \rho \cos\theta$$

$$z = \rho \sin\theta$$

deci $I = \iint_\Delta \rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$.

Scanned with OKEN Scanner

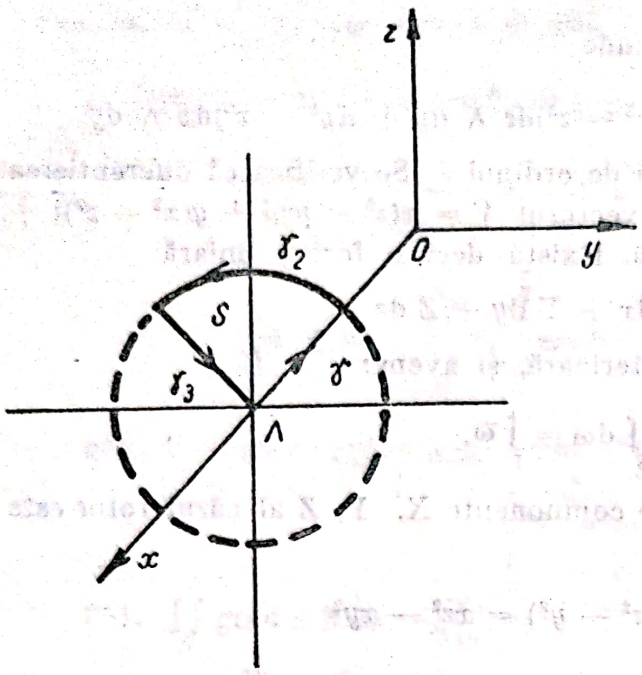

Fig. 48.

$\Delta: 0 \leqslant \rho \leqslant 1; \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$,

aşadar

$$I = \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\cos 2\theta) d\theta =$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Folosind integrala curbilinie, avem de calculat trei integrale succesive Fig. 48.

$$\int_\Gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}.$$

Pe cercul γ_2; $d\rho^2 = 0$ şi $\int_{\gamma_2} = 0$

$$\text{pe } \gamma_1;\ y = z; \int_{\gamma_1} 2y^3 dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2y^3 dy = 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{8}$$

$$\text{pe } \gamma_3 \text{ avem } y = -z \text{ şi } \int_{\gamma_3} -2y^3 \, dy = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 2y^3 \, dy = \frac{1}{8}$$

se obţine $I = \frac{1}{4}$.

855. 1) Relaţiile:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \ r dr = x dx + y dy + z dz$$

$$\vec{V}(M)d\vec{r} = X dx + Y dy + Z dz = \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$$

arată că $\vec{V}(M)$ este gradientul funcţiei U, definită prin

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{r}$$

(se spune că $\vec{V}(M)$ derivă din potenţialul $-U$).

Calculul divergenţei lui $\vec{V}(M)$ ne dă imediat

$$\operatorname{div} \vec{V} = \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Componentele normalei orientate la sfera unitate sînt x, y, z şi $d\sigma$ elementul de arie $\bar{V}(M)$ al suprafeţei S, fluxul lui $\bar{V}(M)$ prin suprafaţa S este deci :

$$\iint_S (Xx + Yy + Zz)d\sigma = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} d\sigma = \iint_S d\sigma = \text{Aria } S$$

(pe S, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Fluxul cîmpului $\bar{V}(M)$ prin suprafaţa Σ, este integrala pe această suprafaţă a formei diferenţiale exterioare :

$$\omega = \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy$$

vom face schimbarea de variabile ; $x = ur$; $y = vr$; $z = wr$ pentru a introduce coordonatele u, v, w ale punctului unde semidreapta OM, taie sfera unitate de centru O. Se verifică că :

$$\frac{x}{r^3} dy \wedge dz = \frac{ur}{r^3} (vdr + rdv) \wedge (wdr + rdw) =$$

$$= u\, dv \wedge dw + \frac{uw}{r} dv \wedge dr + \frac{uv}{r} dr \wedge dw.$$

Prin permutări circulare se obţine :

$$\frac{y}{r^3} dz \wedge dx = v\, dw \wedge du + \frac{vu}{r} dw \wedge dr + \frac{vw}{r} dr \wedge du$$

$$\frac{z}{r^3} dx \wedge dy = wdu \wedge dv + \frac{wv}{r} du \wedge dr + \frac{wu}{r} dr \wedge dv.$$

Observînd că : $du \wedge dr = -dr \wedge du$; $dv \wedge dr = -dr \wedge dv$

$dw \wedge dr = -dr \wedge dw$ se obţine :

$$\omega = \frac{1}{r^3} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) =$$

$$= udv \wedge dw + vdw \wedge du + wdu \wedge dv.$$

Deci dacă E este intersecţia conului C şi al sferei unitate de centru O, fluxul lui $\bar{V}$ prin suprafaţa Σ are expresia :

$$\Phi = \iint_\Sigma \frac{1}{r^3} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) =$$

$$= \iint_E udv \wedge dw + vdw \wedge du + wdu \wedge dv = \text{aria } E.$$

Aceasta este prin definiţie unghiul solid al conului C.

3) Divergenţa lui $\bar{V}(M)$ este nulă, există deci un potenţial vector $\bar{A}$, componentele P, Q, R ale lui $\bar{A}$ sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{x}{r^3} ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y}{r^3} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{z}{r^3}$$

una din componentele lui $\bar{A}$, poate fi aleasă arbitrar ; dacă în particular se ia pentru R valoarea 0 ; prima ecuaţie devine : $\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{x}{r^3}$ şi Q este o primi-

Scanned with OKEN Scanner

tivă a membrului al doilea, considerat numai ca funcție de z (prin intermediul lui r). Pentru calculul primitivei se face schimbarea $z = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\int_0^z x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dz = \int_0^{\mathrm{Arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}} \frac{x\cos d\varphi}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\sin\left[\mathrm{Arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{xz}{(x^2+y^2)r}$$

dacă q este o funcție arbitrară de x și y, rezultă

$$Q(x,\ y,\ z) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)r} + q(x,\ y).$$

Analog a doua ecuație conduce la:

$$P(x,\ y,\ z) = \frac{yz}{(x^2+y^2)r} + p(x,\ y)$$

unde p este o funcție arbitrară de x și y.

Scriind că ecuația a traia este verificată se obține:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{z}{r^3} + q'_x(x,\ y) - p'_y(x,\ y).$$

Ecuația a treia va fi verificată în particular dacă funcțiile p și q sînt nule. Componentele P, Q, R ale unui potențial vector $\bar{A}$ sînt deci:

$$P(x,\ y,\ z) = \frac{yz}{(x^2+y^2)r};\quad Q(x,\ y,\ z) = \frac{-xz}{(x^2+y^2)r},\quad R(x,\ y,\ z) = 0$$

(toate celelalte soluții pentru care R este nul se obțin adunînd la P și Q derivatele parțiale în raport cu x și y ale unei funcții de două variabile x și y).

856. Există un potențial vector, deoarece

$$\mathrm{div}\,\bar{V} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(zx) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0.$$

Existența unui potențial vector este echivalentă cu aceea a formei diferențiale ω, astfel ca

$$d\omega = yz\,dy \wedge dz + zx\,dz \wedge dx + xy\,dx \wedge dy =$$
$$= y\,dy \wedge z\,dz + z\,dz \wedge x\,dx + x\,dx \wedge y\,dy$$

dacă se notează: $u = x^2$; $v = y^2$; $w = z^2$ se obține

$$d\omega = \frac{1}{4}(dv \wedge dw + dw \wedge du + du \wedge dv).$$

Determinarea lui ω este atunci foarte simplă de exemplu:

$$\omega = \frac{1}{8}(v-u)dw + \frac{1}{8}(w-v)du + \frac{1}{8}(u-w)dv =$$

$$= \frac{1}{4}(z^2-y^2)x\,dx + \frac{1}{4}(x^2-z^2)y\,dy + \frac{1}{4}(y^2-x^2)z\,dz.$$

(alte forme posibile ω, se obțin adunînd diferențiala dU a unei funcții U)

Scanned with OKEN Scanner

2) $\bar{V} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$; $\Phi = \iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\cdot d\sigma$

ecuaţiile parametrice ale sferei sînt : $x = \cos u \sin v$; $y = \sin u \sin v$; $z = \cos v$; vectorul unitate al normalei exterioare la sferă este $\bar{n} = \cos u \sin v\bar{i} + \sin u \sin v\bar{j} + \cos v\bar{k}$, $d\sigma = \sin v\, du\, dv$.

$$\Phi = \iint_S \bar{V}\cdot\bar{n}\, d\sigma = 3\iint_\Delta \sin u \cos u \sin^3 v \cos v\, du\, dv :$$

$$\Delta \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Aşadar $\Phi = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u\, du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos v\, dv = \frac{3}{8}$.

857. ω este o formă diferenţială de clasă C^1 pe R^3 pentru că componentele sale în raport cu baza canonică $dx \wedge dy$, $dx < dz$, $dy \wedge dz$ sînt toate de clasă C^1. Avem :

$$d\omega = d[x\, f(x)] \wedge dy \wedge dz + d[2y] \wedge dx \wedge dz - $$
$$-d[3y\, f(x)] \wedge dx \wedge dz - d[2z] \wedge dx \wedge dy.$$

Deci

1) $d\omega(x, y, z) = [f(x) + x f'(x)]\, dx \wedge dy \wedge dz +$

$+ 2dy \wedge dx \wedge dz - [3y f'(x)dx + 3 f(x)dy] \wedge dx \wedge dz - 2dz \wedge dx \wedge dy$

$$d\omega(x, y, z) = [x f'(x) + 4 f(x) - 4]dx \wedge dy \wedge dz$$

pentru că $dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$: $dx \wedge dx \wedge dz = 0$;

$dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$. Atunci :

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow x f'(x) + 4 f(x) - 4 = 0\ ;\ \forall x$$

Integrînd ecuaţia diferenţială de mai sus, rezultă :

$$f(x) = \frac{K}{x^4} + 1 \quad (K : \text{constantă arbitrară}).$$

Condiţia $\ll f$ de clasă C^1 pe $R \gg$ necesită $K = 0$ şi se constată că condiţia $f(x) = 1$ este de prisos. În rezumat :

3) $d\omega = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

a) Calculul $\int_S \omega$. Fie $V = \{(x, y, z) \in R^3 ;\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1\}$ deci $\partial V = S$, ω este o formă diferenţială de clasă C^1 într-un domeniu deschis conţinînd $\bar{V}$ (inchiderea lui V), deci

$$\left|\int_V d\omega\right| = \left|\int_{\partial V} \omega\right|$$

(formulă care se deduce din formula lui Stokes considerînd valorile absolute şi care nu face să intervină orientările respective ale lui V şi ∂V). Avem pentru $f(x) = 1$

$$\left|\int_S \omega\right| = \left|\int_V d\omega\right| = \left|\int_V 0\, dx \wedge dy \wedge dz\right| = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinarea lui P și Q. Fie

$$\omega_1(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy.$$

Componentele P, Q, O ale lui $\omega_1(x, y, z)$ pe baza canonică dx, dy, dz sînt de clasă C^1 în $\mathbf{R}^3$, deci ω_1 este de clasă C^1 în $\mathbf{R}^3$, avem

$$d\omega_1 = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy, \text{ dar cum } dx \wedge dx = 0;$$

$dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ etc. se obține:

$$4)\ d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy - \frac{\partial P}{\partial z}dx \wedge dz - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz$$

dar cum $f(x) = 1$, rezultă:

$$5)\ \omega(x, y, z) = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz - 2z dx \wedge dy$$

Deci [se compară (4) și (5)]

$$d\omega_1 = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2z & (1) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} = -y & (2) \\ -\dfrac{\partial Q}{\partial z} = x & (3) \end{cases}$$

Integrînd (2) în raport cu z se obține $P(x, y, z) = yz + \Phi(x, y)$ (Φ: o funcție arbitrară de clasă C^1 în $\mathbf{R}^2$). Condiția $P(x, y, z) = 0$ necesită $\Phi = 0$ și prin urmare

$$P(x, y, z) = yz.$$

Analog $Q(x, y, z) = -xz$ satisface ecuația (3) și condiției $Q(x, y, z) = 0$

c) Calculul $\left|\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy\right|$: Fie

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 1 \text{ și } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

K este un compact al sub varietății $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 1\}$ care este de dimensiune 2.

$\partial K = \Gamma$ este o subvarietate a lui $\mathbf{R}^3$, de dimensiune 1.

ω_1 este o formă diferențială de clasă C^1 într-un domeniu deschis conținînd K.

Atunci:

$$\left|\int_K d\omega_1\right| = \left|\int_{\partial K} \omega_1\right| \text{ sau încă } \left|\int_K \omega\right| = \left|\int_{\partial K} \omega_1\right| \qquad (6)$$

Pe W (conținînd K), avem $z = 1$ și prin urmare

$$\omega(x, y, z)\,|_W = \omega(x, y, 1) = -2dx \wedge dy$$

din (6) rezultă:

$$\left|\int_{\partial K=\Gamma} \omega_1\right| = \left|\int_K -2dx \wedge dy\right| = 2\iint_\Delta dx\,dy = 2 \text{ Aria } (\Delta)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, aşadar

$$\left| \int_{\Gamma} \omega_1 \right| = 2\pi.$$

3) Calculul $\int_{\hat{\mathcal{C}}} \omega$. Fie $\hat{C} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 = 1 ; x > 0 ; y > 0 ; 0 < z < 1\}$ care este o subvarietate a lui $\mathbf{R}^3$ de dimensiune 2. Să definim o parametrizare a lui $\hat{\mathcal{C}}$, notînd

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = u \end{cases} \tag{7}$$

cu $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ şi $0 < u < 1$.

Fie $g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, 1\right[\to \mathbf{R}^3$

$$(\theta, u) \to (x, y, z)$$

g determină pe $\hat{C}$ orientarea definită prin normala unitate

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g}{\partial u}}{\left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g}{\partial u} \right|} ; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g}{\partial u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta \bar{i} + \sin\theta \bar{j} + 0\bar{k}$$

Deci $\left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g}{\partial u}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = (x, y, 0)$

orientarea determinată de g este deci aceia a normalei unitate exterioară suprafeţii cilindrice $x^2 + y^2 = 1$. Pe $\hat{C}$ astfel orientată (pe care o vom nota C_g) avem, conform (5) şi (7)

$$\int_{\hat{\mathcal{C}}_g} \omega = \int_{\Delta} \cos\theta \, \mathrm{d}(\sin\theta) \wedge \mathrm{d}u - \sin\theta \, \mathrm{d}(\cos\theta) \wedge \mathrm{d}u - 2u \, \mathrm{d}(\cos\theta) \wedge \mathrm{d}(\sin\theta)$$

sau, pentru că $\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\theta = 0$;

$$\int_{\hat{C}_g} \omega = \int_{\Delta} \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}u = \iint_{\Delta} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}u = \text{Aria } (\Delta) = \frac{\pi}{2}$$

CAPITOLUL XIV

ECUAŢII DIFERENŢIALE

858. Ecuaţia se scrie $\frac{x\mathrm{d}x}{a - x} = \frac{b - y}{y}\mathrm{d}y$ de unde integrînd rezultă

$$-x - a \ln|a - x| = y - b \ln|y| + \ln C \text{ sau}$$

$$y^b (a - x)^{-a} = C \, \mathrm{e}^{x+y}.$$

Scanned with OKEN Scanner

859. $\int \frac{dy}{\sin 2y} + \int \frac{dx}{\sin 2x} = C$ sau $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C$.

860. $x \sin y = C$.

861. $\ln \frac{x}{y} - \frac{x+y}{xy} = C$.

862. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$.

863. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. Soluția este

$\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} = \sin \frac{2y-1}{\sqrt{5}} + C$ sau $\frac{2x-1}{\sqrt{5}} = \frac{2y-1}{\sqrt{5}} \cos c + \sqrt{1 - \frac{(2y-1)^2}{5}} \sin C$.

Dacă se pune $\cos c = m$ se obține

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 - 2m(2x - 1)(2y - 1) + 5(m^2 - 1) = 0.$$

864. $\arcsin y = \arcsin x + c$ sau $y^2 + x^2 - 2xy \cos c = \sin^2 c$ curbele integrale sînt conice. Ecuația este definită în pătratul $x \in (-1, 1)$, $y \in (-1, 1)$.

865. $\cos u \, du = y \, dy$ de unde $y^2 = 2 \sin u + C = 2 \sin(x + y) + C$.

866. Se găsește familia de curbe $\frac{1}{y} = \frac{2a}{a^2 - x^2} + C$ sau $C = \frac{a^2 - x^2 - 2ay}{y(a^2 - x^2)}$.

Valoarea lui C este nedeterminată pentru $y_0 = 0$, $x_0 = \pm a$. Acestea sînt cele două puncte fixe prin care trec toate curbele. În aceste puncte

$$y' = \frac{-4ax}{[c(x^2 - a^2) - 2a]^2} = -\varepsilon \text{ cu } x_0 = \varepsilon a, \; y_0 = 0.$$

867. $\frac{x(1 + xy)}{1 - xy} = C$. **868.** $\ln |x| + \frac{y^2}{x} = c$.

869. $y = \frac{t}{x}$, $y' = \frac{t'x - t}{x^2}$. Ecuația devine $xt' - t \ln|t| = 0$ de unde $y = \frac{1}{x} e^{cx}$.

870. $xy + \ln \left| \frac{y}{x} \right| = c$. **871.** $xy(x^{a-1} - c) = ax^{a-1} - c$.

872. $y' = z$ de unde $\frac{dz}{z(1 - z)} + \frac{dx}{x} = 0$. Rezultă $x^2 z^2 = \lambda(1 - z^2)$. Pentru $\lambda = a^2$; $y' = \pm \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ deci $y = \operatorname{arg\,sh} \frac{x}{a} + b$. Soluția generală depinde de două constante arbitrare a și b.

Soluție analoagă pentru $\lambda = -a^2$.

873. Se obține ecuația în z; $x^2 z'^2 = z^2 - 4$ de unde $z = \frac{c^2 x^2 + 1}{cx}$, apoi y.

874. Subtangenta la curba $y = f(x)$ este $-\frac{y}{y'}$, deci ecuația diferențială a curbelor este $y = -ay'$; de unde $y = c e^{-\frac{x}{a}}$.

875. P fiind proiecția lui M pe Ox, T va fi simetricul lui O în raport cu P, de unde ecuația $x = -\frac{y}{y'}$, a cărei soluție este $xy = c$ o familie de hiperbole.

Scanned with OKEN Scanner

876. Se găseşte ecuaţia $y^2 = 2pyy'$ de unde curbele $y = \lambda e^{-\frac{x}{2p}}$, care se deduc toate din una prin translaţii paralele cu Ox.

877. Se găseşte condiţia $n\int_a^x y\,dx = m\int_b^y x\,dy$ unde punctul (a, b) este originea arcului considerat. Diferenţiind $nydx = mxdy$ de unde curbele $y^m = cx^n$.

878. Avem două condiţii $x_1y_1 = xy$ şi $\int_1^{x_1} y_1dx_1 = 2\int_1^x ydx$. Diferenţiind $2y\,dx = y_1dx_1$, şi ţinînd seama de prima relaţie $2\frac{dx}{x} = \frac{dx_1}{x_1}$. Prin urmare $x_1 = x^2$, $y_1 = \frac{y}{x}$. Avem deci curba C_1 dacă curba C este cunoscută.

879. $r = Ce^{\theta \operatorname{ctg} V} = e^{(\theta-\theta_0)\operatorname{ctg} V}$.
Avem o familie de spirale logaritmice deducîndu-se din una din ele, fie printr-o omotetie, fie printr-o rotaţie.

880. $r = a(\theta - \theta_0)$. **881.** În polare, se găseşte $3r^4\,d\theta^2 + (r^2 - 4a^2)(dr^2 + r^2d\theta^2) = 0$ care este cu variabile separabile. Se poate pune $r^2 = a^2u$.

882. $y = C \pm \sqrt{2ax}$. **883.** $y = C \pm \cos x$.

884. $\cos y = \operatorname{th}^2(x - x_0)$. **885.** Punînd $y' = t$ ca parametru, se obţin curbele

$$x = t + \frac{1}{t};\quad y = \frac{1}{2}t^2 - \ln|t| + C.$$

886. Ecuaţia $y\sqrt{1 + y'^2} = a$ se rezolvă punînd $y' = \operatorname{tg}\varphi$, de unde $y = a\cos\varphi$. Pe de altă parte $dy = \operatorname{tg}\varphi\,dx = -a\sin\varphi\,d\varphi$, de unde $x - x_0 = -a\sin\varphi$. Curbele integrale sînt cercurile $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$.

887. Ecuaţia $y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} = a$ se rezolvă punînd $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Se găsesc tractricele

$$x = x_0 + a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| + a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi.$$

888. Se formează ecuaţia $\frac{y'^2}{1 + y'^2} = \frac{4y}{k}$ care se rezolvă ca precedenta. Se găsesc cicloidele:

$$x - x_0 = \frac{k}{8}(2\varphi + \sin 2\varphi),\quad y = \frac{k}{8}(1 - \cos 2\varphi).$$

Pentru $x_0 = 0$, curba este tangentă în O la Ox şi admite Oy ca axă de simetrie.

889. În polare, se formează ecuaţia $r^2 + \frac{r^4}{r'^2} = 4a^2$ care se integrează punînd $r = 2a\cos t$, de unde $r' = \frac{r^2}{2a\sin t} = 2a\frac{\cos^2 t}{\sin t}$, apoi $d\theta = -\operatorname{tg}^2 t\,dt$ şi $\theta - \theta_0 = t - \operatorname{tg} t$.

Scanned with OKEN Scanner

890. Curba $u^3 - 3uv + v^3 = 0$ fiind universală, se caută o reprezentare parametrică tăind-o cu $u = tv$, de unde $v = y = \frac{3t}{1+t^3}$, $u = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{1+t^3}$. Se elimină y între aceste două relaţii, diferenţiind pe prima, de unde $\frac{dx}{dt} = \frac{1-2t^3}{t^3(1+t^3)}$ şi $x - x_0 = -\frac{1}{t} + \ln|1+t| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, la care asociind valoarea lui y, se obţine o reprezentare parametrică a curbelor integrale.

891. Se pune $y^2 = u$. Se găseşte

$$x - x_0 = a\ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{a} \pm \sqrt{a^2 - y^2}.$$

892. $y = Ce^{-\frac{x}{y}}$. **893.** $y = Ce^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$. **894.** $x^2 = 2Cy + C^2$.

895. $3x^2y + y^3 = C$. **896.** $y^2(1 - Cx) = x^2$.

897. $y^2 = 4Cx + C^2$. **898.** $y = \lambda x$, $y^2 - x^2 = \lambda$.

899. $xy = \lambda$, $x^2 - y^2 = \lambda$. Ecuaţia se scrie $(y + xy')(yy' - x) = 0$.

900. $y = 2x\operatorname{arctg}\left(\ln\left|\frac{C}{x}\right|\right)$. **901.** $xy\cos\frac{y}{x} = C$.

902. Ecuaţia se reduce printr-o translaţie a axelor ca originea să vină în $M(1, 0)$, punctul de intersecţie al dreptelor $x + y - 1 = 0$ şi $-x + y + 1 = 0$. Deci $x = u + 1$, $y = v$ şi ecuaţia devine $udu + vdv = udv - vdu$. Se împarte cu $u^2 + v^2$:

$$\frac{udu + vdv}{u^2 + v^2} = \frac{\frac{udv - vdu}{u^2}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2};\ \text{integrînd}$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} + \ln C \text{ sau } u^2 + v^2 = 2Ce^{2\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}$$

care în coordonate polare cu polul în M devine $r = Ce^{\theta}$, spirale logaritmice.

903. $x = u - 1$, $y = v + 2$. Dreptele se taie în $M(-1, 2)$. Ecuaţia devine $(u - 2v)du + (2u - v)dv = 0$. Soluţia este $(x + y + 1)^3 = C(x - y + 3)$.

904. Dreptele $x + y + 1 = 0$ şi $2x + 2y - 1 = 0$ sînt paralele. Se face $x + y + 1 = u$, $y' = u' - 1$. Rezultă

$$(x + 2y + 2) + 3\ln(x + y - 2) = C.$$

905. $(y - 2x)^2 = C(x + 2y - 5)$. **906.** Ecuaţia devine omogenă dacă se pune $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ unde

$$\alpha = \frac{bc' - ac}{a^2 + b^2},\quad \beta = -\frac{ac' + bc}{a^2 + b^2}.$$

Se procedează apoi ca la ex. 905 şi se obţine

$$\ln(u^2 + v^2) = 2\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{v}{u} + C \text{ sau în coordonate polare}$$

$$r = Ce^{\frac{b}{a}\theta}.\ \text{cu polul în } (\alpha, \beta).$$

Scanned with OKEN Scanner

907. Fie $y = f(x)$ ecuaţia curbei căutate. Tangenta şi normala au ecuaţiile

$$Y - y = y'(X - x);$$

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

$$OP = \frac{xy' - y}{\pm\sqrt{1 + y'^2}}, \quad MN = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

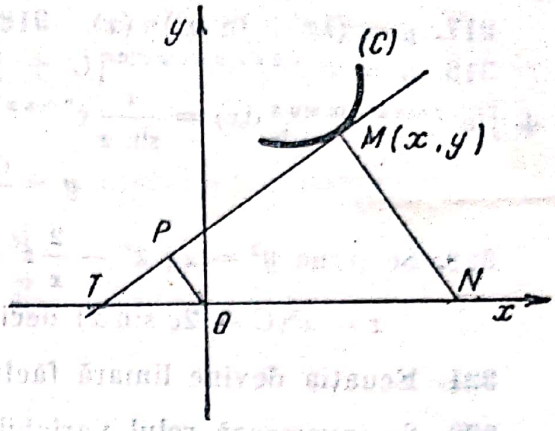

Fig. 49.

Ecuaţia diferenţială a curbelor este

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\, y\sqrt{1 + y'^2} = K(x^2 + y^2) \text{ sau}$$

$$(xy' - y)y = K(x^2 + y^2) \text{ a cărei soluţie este}$$

$$x^2 + y^2 = C\,e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \text{ Fig. 49.}$$

908. Ecuaţia diferenţială este $xy = \left(\frac{y}{y'}\right)^2$ de unde $y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x}}$ pentru $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$ integrala este $(x + y - c)^2 = 4xy$ o familie de parabole.

909. $P\left(0,\ y + \frac{x}{y'}\right)$ fiind pe normală, NP are ecuaţia $Y = -\frac{x}{y}(X - x)$ care intersectată cu $X = 0$ dă $Y = \frac{x^2}{y}$, deci $\frac{x^2}{y} = y + \frac{x}{y'}$, sau $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ ecuaţie omogenă a cărei soluţie este

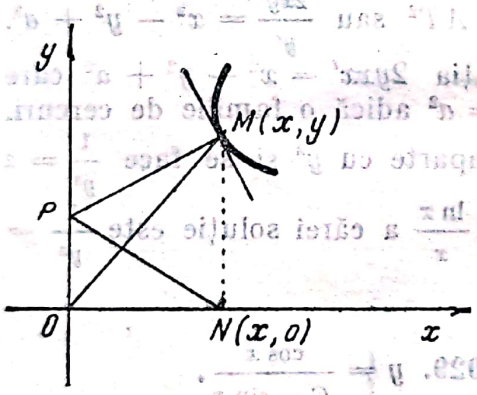

Fig. 50.

$$Cy = e^{-\frac{x^2}{2y^2}} \text{ (Fig. 50)}$$

910. Cercul de diametru OM are ecuaţia

$$\left(X - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{4};$$

sau $X^2 + Y^2 - xX - yY = 0$.

$P\left(\frac{2x + yy'}{2}, \frac{y}{2}\right)$ verifică ecuaţia cercului. Se obţine $y^2y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0$, o ecuaţie omogenă care se mai scrie $(yy' + x)^2 = x^2 + y^2$ sau $yy' + x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Integrala ecuaţiei $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$ este $y^2 + 2Cx - C^2 = 0$ o familie de parabole.

911. $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$. **912.** $y = (C + x^2)e^{-x^2}$.

913. $y = \frac{Cx}{\sqrt{1 + xa}} + x$

914. $y' - \frac{n}{x}y = x^ne^x$; $y = Cx^n + e^x$.

915. $y = C\,e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

916. Avem $x\frac{y'}{\cos^2 y} + \operatorname{tg} y = 3x^2$ se face $\operatorname{tg} y = z$ şi se obţine ecuaţia liniară $z' + \frac{1}{x}z = 3x$; $z = \frac{c}{x} + x^2$, deci $x\operatorname{tg} y - x^3 = C$.

917. $y = (\lambda x + \ln|x|)\varphi(x)$. **918.** $y = Cx + x\ln(\ln|x|)$.

919. $y = e^{-\int(2\sin x + \operatorname{ctg} x)dx}[C + \int e^{\int(2\sin x + \operatorname{ctg} x)dx}dx] = e^{2\cos x - \ln\sin x}(C + \int e^{-2\cos x + \ln\sin x}dx) = \frac{1}{\sin x}e^{2\cos x}(C + \int e^{-2\cos x}\sin x\,dx)$ deci

$$y = \frac{Ce^{2\cos x} + 1}{2\sin x}.$$

920. Se pune $y^2 = z$; $z' - \frac{2}{x}z + 2ax^2\cos x = 0$

$z = x^2(C - 2a\sin x)$ deci $y^2 = Cx^2 - 2ax^2\cos x$.

921. Ecuaţia devine liniară făcînd $y^2 = z$; $y = \frac{C + 2x}{\sin^2 x}$.

922. Se inversează rolul variabilelor şi ecuaţia devine liniară, deci $y' = \frac{1}{x'}$; $x' + x\operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos y}$ de unde $x = C\cos y + \sin y$.

923. $y' = \frac{1}{x'}$; $x = Cy - y^2 - a^2$.

924. $y = (x^2 + 1)^h(rJ_{h+1} + \lambda)$ unde $J_n = \int_0^x \frac{du}{(u^2 + 1)^n}$ etc.

925. Se scrie că P verifică ecuaţia parabolei de unde rezultă ecuaţia $y' = -\frac{4py}{y^2 - 8px}$ care devine liniară punînd $y' = \frac{1}{x'}$ adică $x' - \frac{2}{y}x = -\frac{y}{4p}$; $x = Cy^2 - \frac{y}{4p}\ln|y|$.

926. Fie $x = f(x)$ curba căutată. $MT^2 = AT^2$ sau $\frac{2xy}{y'} = x^2 - y^2 + a^2$. Schimbînd rolul variabilelor se obţine ecuaţia $2yxx' = x^2 - y^2 + a^2$ care devine liniară punînd $x^2 = z$; $x^2 + y^2 - Cy = a^2$ adică o familie de cercuri.

927. Ecuaţia este de tip Bernoulli. Se împarte cu y^3 şi se face $\frac{1}{y^2} = z$ şi se obţine ecuaţia liniară $z' - \frac{4}{x}z = -2\frac{\ln x}{x}$ a cărei soluţie este $\frac{1}{y^2} = Cx^4 + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{8}$.

928. $\frac{1}{y} = z$; $y = \frac{1}{Cx^2 - x\ln|x| - x}$. **929.** $y = \frac{\cos x}{C - \sin x}$.

930. Substituţia $\frac{1}{y} = z$ transformă ecuaţia în ecuaţia 914 deci $y = \frac{2\sin x}{1 + Ce^{2\cos x}}$.

931. $2y + x^2y^2(2\ln|y| - 1) = \lambda x^2$.

932. Schimbînd rolul variabilelor şi făcînd $\frac{1}{x^2} = z$ se obţine soluţia $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

933. Se pune $z = \frac{1}{y^2}$ de unde ecuaţia $xz' + 2z + 6x = 0$

Soluţia generală este $2y^2(x^3 + \lambda) + x^2 = 0$, curbele au două forme după semnul lui λ. Fig. 51 — 52

934. $y^2 = \frac{x^3}{3x - 2}$ este curba integrală. Asimptotele se obţin printr-o dezvoltare în $\frac{1}{x}$. (Fig. 53)

Scanned with OKEN Scanner

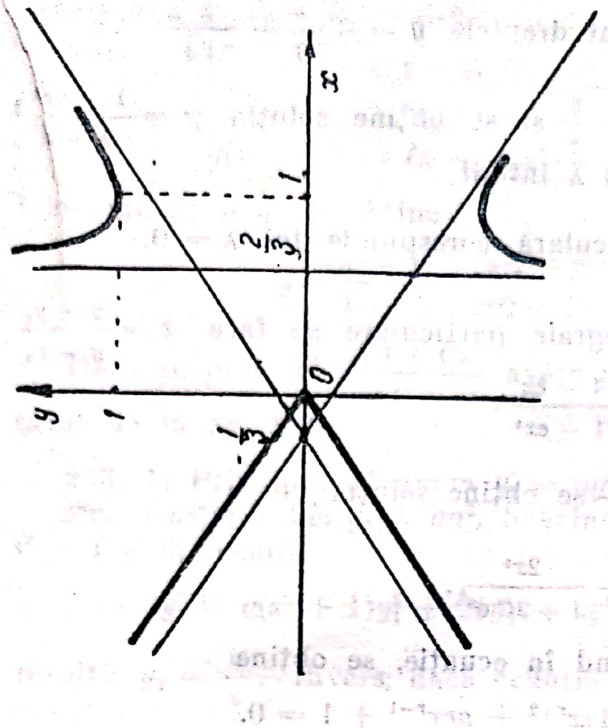

Fig. 53.

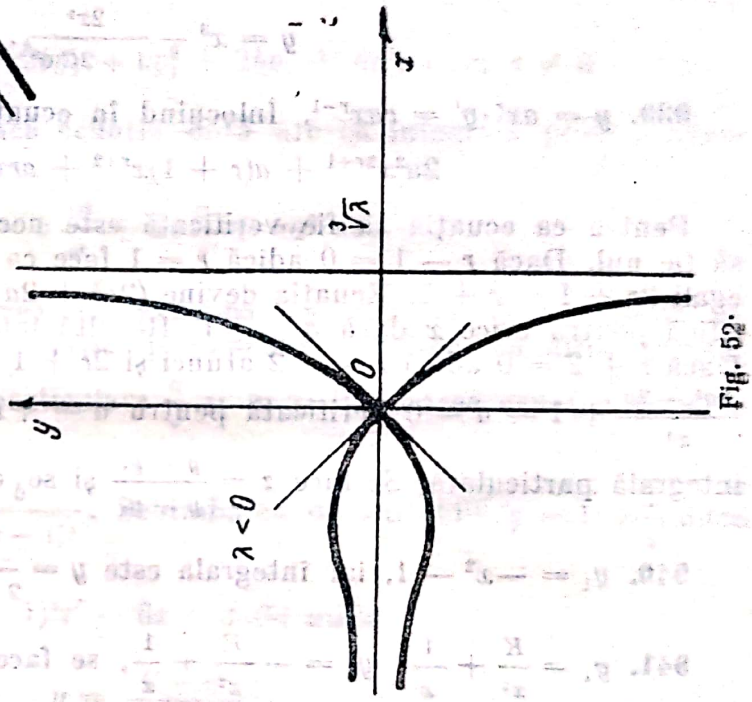

Fig. 52.

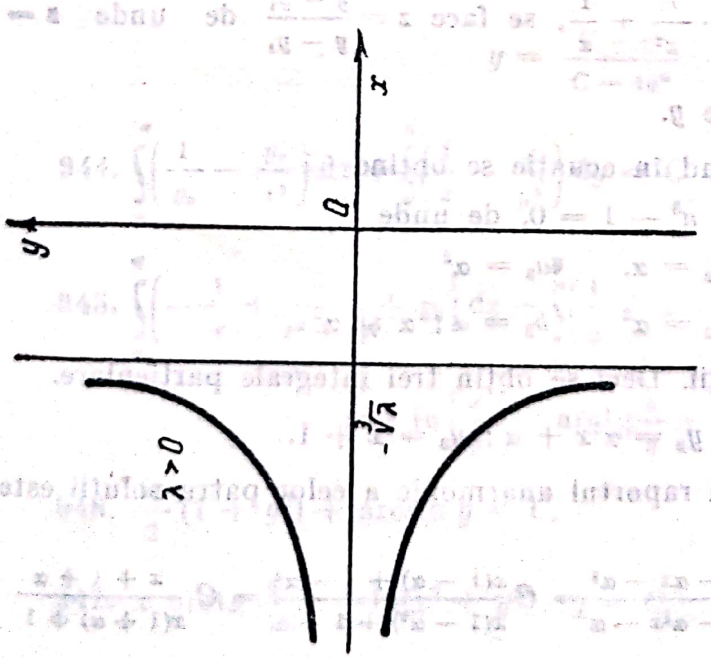

Fig. 51.

Scanned with OKEN Scanner

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{x}\right)$ și sînt dreptele $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

935. $y_1 = -x^2$ se face $y = -x^2 - \frac{1}{z}$ și se obține soluția $y = \frac{1 - \lambda x^2}{\lambda - x}$. Soluția particulară y_1 corespunde lui λ infinit.

936. $y = \frac{\cos x + \lambda}{1 + \lambda \sin x}$. Soluția particulară corespunde lui $\lambda = 0$.

937. $y_1 = \frac{1}{x}$ și $y_2 = \frac{2}{x}$ sînt integrale particulare se face $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ variabilele se separă și rezultă $y = \frac{1 - cx}{1 - cx^2}$.

938. $y_1 = x^3$. Se face $y = x^3 - \frac{1}{z}$ se obține soluția

$$y = x^3 - \frac{2x^3}{1 + 2C\,e^{x^2}}.$$

939. $y = ax^r \cdot y' = rax^{r-1}$. Înlocuind în ecuație, se obține

$$2a^2x^{2r+1} + a(r+1)x^{r+2} + arx^{r-1} + 1 = 0.$$

Pentru ca ecuația să fie verificată este necesar ca unul din exponenți să fie nul. Dacă $r - 1 = 0$ adică $r = 1$ face ca ceilalți doi exponenți să fie egali $2r + 1 = r + 2$. Ecuația devine $(2a^2 + 2a)x^3 + a + 1 = 0$ care se verifică pentru orice x dacă $a = -1$. Rezultă integrala particulară $y_1 = -x$. Dacă $r + 2 = 0$ adică $r = -2$ atunci și $2r + 1 = r - 1$ și ecuația devine $\frac{2a^2 - 2a}{x^2} + 1 - a = 0$ verificată pentru $a = +1$, deci $y_2 = \frac{1}{x^2}$ este a doua integrală particulară. Se face $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ și se obține soluția $y = \frac{x + C}{Cx^2 - 1}$.

940. $y_1 = -x^2 - 1$, iar integrala este $y = \frac{1}{2 + C(x^2 + 1)} - x^2 - 1$.

941. $y_1 = \frac{K}{x^2} + \frac{1}{x}$, $y_2 = -\frac{K}{x^2} + \frac{1}{x}$, se face $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ de unde $z = \lambda e^{\frac{2K}{x}}$, din care deducem pe y.

942. $y_1 = ax + b$; înlocuind în ecuație se obține

$$a^3 - 1 = 0, \text{ de unde}$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \alpha, \qquad a_3 = \alpha^2$$

$$b_1 = 1 \qquad b_2 = \alpha^2 \qquad b_3 = \alpha;\ \alpha \text{ și } \alpha^2$$

rădăcinile complexe ale unității. Deci se obțin trei integrale particulare.

$$y_1 = \alpha x + \alpha^2;\ y_2 = \alpha^2 x + \alpha;\ y_3 = x + 1.$$

Soluția se obține scriind că raportul anarmonic a celor patru soluții este constant.

$$\frac{y - y_1}{y - y_3} = C\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3} = C\frac{x + 1 - \alpha x - \alpha^2}{x + 1 - \alpha^2 x - \alpha} = C\frac{x(1 - \alpha) + 1 - \alpha^2}{x(1 - \alpha^2) + 1 - \alpha} = C\frac{x + 1 + \alpha}{x(1 + \alpha) + 1}$$

cum $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, rezultă

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C\,\frac{x - \alpha^2}{1 - \alpha^2 x} \text{ de unde}$$

$$y(1 - \alpha^2 x - Cx - C\alpha^2) = y_1(1 - \alpha^2 x) - Cy_2(x - \alpha^2)$$

înlocuind y_1 și y_2 se obține

$$y = \frac{\alpha^2 - x^2 - C\alpha^2 x^2 + C}{1 + C\alpha - x(C + \alpha^2)} = \frac{\alpha^2 + C - x^2(1 + C\alpha^2)}{1 + C\alpha^2 - x(C + \alpha^2)}$$

Dacă se pune $C_1 = \frac{1 + C\alpha^2}{C + \alpha^2}$ avem $y = \frac{1 - C_1 x^2}{C_1 - x}$, adică se regăsește rezultatul de la ex. 930.

943. 1) Prin ipoteză avem $y_1' = ay_1^2 + 2by_1 + au^2$
$s^2 y_1' = as^4 y_1^2 + 2bs^2 y_1 + au^2$. Scăzînd cele două ecuații și simplificînd cu $s^2 - 1 \neq 0$, rezultă

$$y_1' = a(s^2 + 1)y_1^2 + 2by_1 = ay_1^2 + 2by_1 + au^2, \text{ cum } a \neq 0$$

rezultă $y_1 = \frac{u}{s}$. Invers, dacă ecuația dată are ca integrală pe $\frac{u}{s}$, avem

$$\frac{u'}{s} = a\frac{u^2}{s^2} + 2b\frac{u}{s} + au^2 \text{ sau}$$

$su' = au^2 + 2bsu + as^2u^2$ ceea ce exprimă că ecuația dată admite ca integrală și pe su. Deci relația precedentă exprimă condiția cerută. Se cunosc deci integralele particulare $\frac{u}{s}$ și us și integrarea ecuației date se obține printr-o cuadratură.

2) Se găsește $b = -\frac{5}{3(x-1)^2}$. Schimbarea de variabilă $y = 1 + \frac{1}{z}$ duce la ecuația

$$-3(x - 1)^2 z' = 6z + 8 \text{ de unde}$$

$$y = \frac{C - e^u}{C - 4e^u}.$$

944. $\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y_0} - \frac{y_0}{x^2}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = C$ sau $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C$.

945. $\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{1}{x} + \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} + y_0\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y} + x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = C$

$$\text{sau } \ln\left|\frac{x}{y}\right| + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + xy = C.$$

946. $\frac{x^2}{2}(1 + y^2) + \arcsin y = C.$

947. $x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\ln(x^2 + y^2) - y = C.$

Scanned with OKEN Scanner

948. $x+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^2}{2}=C.$

949. Expresia $\lambda(x)[x^2y+y^2+2xy)dx+(x^2+x)(x+2y)dy]$ trebuie să fie diferenţială totală. Ecuaţia (3) în acest caz devine

$$-Q\frac{d\lambda}{dx}=\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\text{ rezultă}$$

$\lambda(x)=\frac{K}{(x+1)^2}$. Curbele integrale au ecuaţia

$$xy(x+y)=C(x+1).$$

950. Divizînd cu y, ecuaţia devine

$(1+2y^2)dx+(4xy^2-2)\frac{ydy}{y^4}=0$ şi nu depinde decît de $y^2=u$. Se obţine astfel $(1+2u)dx+(4ux-2)\frac{du}{u}=0$. Primul membru este diferenţiala totală a lui $x+2ux-\ln u$ deci ecuaţia curbelor integrale este $x(1+2y^2)-2\ln|y|=C$.

951. Trebuie ca $\frac{P'_y-Q'_x}{Q}$ să nu depindă decît de x. Această condiţie este verificată în ecuaţia dată.

952. Funcţiile P şi Q verifică relaţiile

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=mP;\qquad x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=mQ.$$

Va trebui să arătăm că $\frac{Pdx+Qdy}{xP+yQ}$ este diferenţiala totală exactă. Condiţia este

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right)$. Efectuînd calculul obţinem

$$P\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

953. După 952 $\frac{1}{xP+yQ}=\frac{1}{(x-y)^2}$ este un factor integrat.

954. $\lambda=\lambda(u)$ unde $u=xy$.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{d\lambda}{du};\qquad\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{d\lambda}{du}$$

Ecuaţia (3) devine $u\frac{d\lambda}{du}=-2\lambda$ deci $\lambda=\frac{1}{x^2y^2}$

Rezultă soluţia $x^2+y^2-\frac{2}{xy}=C$.

955. $\lambda=\frac{1}{xy}$. Soluţia este $x^2y^2+2\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

956. 1) Ecuaţia este omogenă. Soluţia este $x^2 + y^2 = C(y - x)$.
2) Ecuaţia care dă pe λ este $u\lambda'(u) + 2\lambda = 0$ deci

$\lambda(x^2 + y^2) = \frac{K}{(x^2 + y^2)^2}$. Se ia $K = 1$. Amplificînd ecuaţia cu $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ şi integrînd se obţine $x^2 + y^2 = C_1(y - x)$.

957. Se obţine $\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} - \frac{x\,dy - y\,dx}{y\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

sau în coordonate polare

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{d\theta}{\sin\theta} = 0 \quad \text{deci} \quad \rho = c\,\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Curba care are pe $y = 2a$ ca asimptotă se obţine pentru $C = a$. În adevăr $\rho \to \infty$ cînd $\theta \to \pi$ şi asimptota paralelă cu Ox are ca ordonată $\lim\limits_{\theta\to\pi} y = \lim\limits_{\theta\to\pi} \rho \sin\theta$, dar

$$\lim_{\theta\to\pi} y = \lim_{\theta\to\pi} C \sin\theta \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 2C. \text{ Deci } y = 2a \text{ este asimptota.}$$

Curba este o strofoidă dreaptă (Fig. 54).

958. Tangenta în (x, y) are ecuaţia

$Y - y = y'(X - x)$ de unde

$Y - X \cdot y' = y - xy' = \psi(y')$.

De-a lungul tangentei $Y'_x = y'$ deci avem

$Y = XY' + \psi(Y')$.

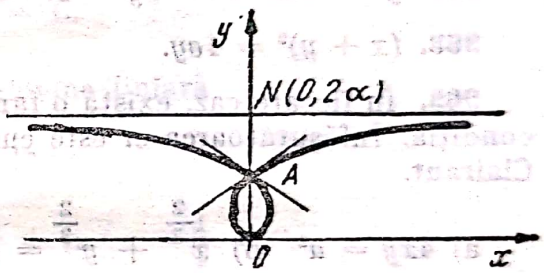

Fig. 54.

Era de prevăzut ca curbele integrale să cuprindă o familie de drepte a căror înfăşurătoare este integrala singulară.

959. $y = -xy' - \frac{1}{2}y'^2$ este o ecuaţie Lagrange, se notează $y' = p$,

deci $y = -xp - \frac{1}{2}p^2$; se derivează şi se obţine

$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = -\frac{1}{2}$ de unde, $x = \frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{p}{3}$; $y = -C\sqrt{p} - \frac{p^2}{6}$ care sînt ecuaţiile parametrice ale curbelor integrale.

960. $x = 2(1 - p) + C\,e^{-p}$, $y = C\,e^{-p}(1 + p) + 2 - p^2$.

961. Ecuaţie Clairaut. $y = Cx + C^2$ şi $y = -\frac{x^2}{4}$ reprezintă integrala generală şi integrala singulară.

962. Ecuaţie Lagrange. $y' = p$; $y = \frac{3 - p}{1 + p}px$.

Derivînd se obţine $2\frac{dx}{x} + \left(\frac{3}{p} - \frac{2}{p + 1}\right)dp = 0$ de unde $x^2 = C\frac{(p+1)^2}{p^3}$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $C > 0$ se pune $C = a^2$, rezultă că și $p > 0$. Se pune $p = t^2$. Deci

$$x = a\frac{1+t^3}{t^3}; \quad y = a\frac{3-t^3}{t}$$

Dacă $C < 0$ atunci $C = -a^2$ și $p = -t^2$ și

$$x = a\frac{t^3-1}{t^3}; \quad y = a\frac{t^3+3}{t}$$

Se observă că

$$x(-t) = -x(t)$$

$$y(-t) = -y(t)$$

Deci curbele integrale sînt simetrice în raport cu originea.

963. Ecuație Clairaut. Cele două integrale sînt

$$y = Cx + \cos C; \; y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

964. $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

965. $y^2 = 4ax$. **966.** $xy = 1$. **967.** $(x+a)^2 = 4ay$.

968. $(x+y)^2 = 4ay$.

969. În fiecare caz, există o familie de drepte cu un parametru verificînd condiția. Înfășurătoarea ei este curba căutată. Ecuațiile obținute sînt de tip Clairaut.

a) $4xy = a^2$ b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ d) $y^2 = 4ax$.

970. Ecuația diferențială a curbelor este $x - yy' = 0$ iar a traiectoriilor este $xy' + y = 0$ a cărei soluție este $xy = C$, o familie de hiperbole echilatere.

971. Ecuația diferențială a curbelor $y^2(c-x) = x^3$ este $\frac{y}{2y'} = \frac{x^3}{y^2+3x^2}$ obținută eliminînd pe C între ecuația curbelor și derivata ei. Ecuația traiectoriilor este $y'(y^3 + 3x^2y) + 2x^3 = 0$ a cărei integrală este $(x^2+y^2)^2 = C(y^2+2x^2)$.

972. $x^2 = ky^3 + y^2$. **973.** $(x^2+y^2)^2 = C_1(x^2-y^2)$ o familie de lemniscate. **974.** $\ln|y| + 2x = C$.

975. $2y^2 + x^2 - 2a^2 \ln|x| = C$.

976. $y = xy' - f\left(-\frac{1}{y'}\right)$ deci verifică o ecuație Clairaut, ale cărei soluții sînt drepte și înfășurătoarea lor (Γ). Curbele (C) sînt desfășurate ale lui (Γ) și formează o familie de curbe paralele.

977. Din ecuația dată deducem $y' - \frac{1}{y'} = \varphi(x, y)$ sau $y'^2 - y'y^6 - 1 = 0$ și prin fiecare punct din plan unde $\varphi(x, y)$ este definită trec două curbe ortogonale între ele, produsul rădăcinilor fiind -1. În cazul conicelor se găsește $xy\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = y^2 - x^2 + a^2 - b^2$ și condiția precedentă este satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

978. a) $r = C(1 - \cos\theta)$. b) $r = C\sin^2\theta$. c) $r = C\sqrt{1+\cos^2\theta}$. d) $r = Ce^{-\frac{\theta}{m}}$. e) $r^2 = C\cos 2\theta$. f) $\left(r + \frac{1}{2r^2}\right)\cos\theta = C$.

979. Se obţine ecuaţia diferenţială

$$x\,dy + y\,dx + \operatorname{tg}\alpha(y\,dy - x\,dx) = 0.$$

Membrul I este o diferenţială totală. Curbele au ecuaţia

$$2xy + \operatorname{tg}\alpha(y^2 - x^2) = C.$$

980. $xy' + y = (xy)'$ se face deci $xy = t$. Se obţine

$$2x^3y^3 = 3a^2x^2 + C.$$

981. Omogenă : $(y^2 + 2x^2)^2 = C^2(x^2 + y^2)$.

982. Omogenă : $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

983. Omogenă : $x^2\operatorname{sh}\frac{y}{x} = C$.

984. Omogenă : $\sin\frac{2y}{x} + \frac{2y}{x} + 4\ln|x| = C$.

985. Se schimbă rolul variabilelor şi devine liniară

$$x = Cy - \frac{1}{2}\ln|y|.$$

986. Variabile separabile $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y^2+1}{\sqrt{3}} + \ln|x| - \frac{1}{x} = C$.

987. Bernoulli. $y = \left(\frac{C + \ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x\right)^2$.

988. Făcînd $y = tx$ se obţine o ecuaţie Bernoulli.

$$2x^3 + 3x(y - x)^2 + 2C(y - x)^3 = 2.$$

989. Făcînd $y = ux^2$ se separă variabilele

$$(y + x^2)^2 = Cy.$$

990. $y = tx$ şi variabilele se separă. $y = x\frac{(x^2 - C)^2 + 4}{(x^2 - C)^2 - 4}$.

991. $(y - x)^2 - 2C(y + x) + C^2 = 0$.

992. $u(x) = \cos y$; $u'(x) = -\sin y \cdot y'$; $y' = -\frac{u'(x)}{\sin y}$; se obţine ecuaţia Bernoulli: $xu'\ln x - u = -xu^2$. Rezultă $y = \arccos\frac{\ln|x|}{C + x}$.

993. $u(x) = \sin y$ se obţine ecuaţia Bernoulli.

$u' - u = u^2\cos x$ cu soluţia $\frac{2}{\sin y} + \sin x + \cos x = Ce^{-x}$.

Scanned with OKEN Scanner

994. Se inversează rolul variabilelor $x^2 = \frac{y^5}{1+Cy}$.

995. Ecuaţia liniară în x. Rezultă

$$2xy^2 - 4x + 1 = C\,e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

996. $u(y) = \sin x$, $u'(y)\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{u'(y)}$ se obţine ecuaţia

$$u' - 4u = y^2 \text{ cu soluţia}$$

$$\sin x = C\,e^{4y} - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} - \frac{1}{32}.$$

997. Ecuaţie Lagrange. $y = \pm(x-1)$ soluţii singulare. Soluţia generală este

$$x = Cp + 3p^2$$

$$y = \frac{C}{2}(1+p^2) + 2p^3$$

condiţia din enunţ dă $C = -2$.

998. Ecuaţie Lagrange. $y' = p$ se derivează

$p - \frac{1}{p} = \left(x - \frac{x}{p^2} + p^2 - 1\right)\frac{dp}{dx}$. Soluţiile ecuaţiei $p^2 = 1$; $y' = \pm 1$ dau soluţiile singulare;

$y = x + \frac{1}{6}$; $y = -x + \frac{5}{6}$. Înlăturînd aceste soluţii rămîne ecuaţia

$$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = p, \text{ de unde}$$

$$x = 2Cp + p^2$$

$$y = C(1+p^2) + \frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{2}$$

Curba trece prin origine dacă avem simultan

$$p(2C+p) = 0$$

$$C(1+p^2) + \frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{2} = 0.$$

Dacă $p = 0$ rezultă $C = -\frac{1}{2}$; dacă $p = -2C$ rezultă $4C^3 - 3C - \frac{3}{2} = 0$.

Această ecuaţie are o rădăcină reală dată de formula lui Cardan.

$$C = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{12 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{80}}\right)$$

Pentru $C = -\frac{1}{2}$ se obţine curba

$$x = p^2 - p$$

$y = \frac{2}{3}p^3 - \frac{p^2}{2}$ care este tangentă în origine la Ox.

Scanned with OKEN Scanner

999. Se pune $x = ty$ și ecuația devine omogenă.

$$(t^2 - y^2)dy - t(t\,dy + y\,dt) = 0 \text{ sau}$$

$$y\,dy + t\,dt = 0 \text{ cu soluția } y^2 + \frac{x^2}{y^2} = a^2$$

care se poate reprezenta parametric prin ecuațiile

$$x = a^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$y = a \sin\theta$$

sau dacă punem $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$;

$$x = \frac{2a^2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2},\quad y = \frac{2at}{1+t^2}$$

Aceste curbe sînt universale de gradul patru. Se poate presupune $a > 0$ căci curba rămîne aceeași dacă se schimbă a în $-a$. Ele sînt simetrice în raport cu axele de coordonate.

Dacă presupunem $x > 0$, $y > 0$, ecuațiile

$$x = y\sqrt{a^2 - y^2},\quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^4}{xy} = \frac{a^2 - 2y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

arată că dacă y crește de la 0 la $\frac{a}{\sqrt{2}}$ și a; x crește de la 0 la $\frac{a^2}{2}$, apoi scade de la 0.

Părțile simetrice dau două bucle închise.

Tangentele în 0 sînt $x = \pm ay$. Dacă θ variază de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ și π, punctul (x, y) descrie în sens pozitiv bucla corespunzătoare lui $y > 0$. Dacă θ crește de la π la 2π punctul descrie bucla simetrică în sens negativ. Dacă a crește buclele sînt din ce în ce mai mari și nu se taie decît în origine.

1000. Se derivează ecuația în raport cu x și se obține

$xy = 2x + y'$, de unde $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 2$. Curba trece prin $(a,\ a^2)$ dacă $C = (a^2 - 2)e^{-\frac{a^2}{2}}$; deci

$$y = (a^2 - 2)e^{\frac{x^2 - a^2}{2}} + 2.$$

1001. Prin derivare se obține $2y\sqrt{1 + y'^2} = 2 + 2yy'$ sau

$y^2 - 1 = 2yy'$ de unde soluția $y^2 - 1 = Ce^x$.

1002. Se derivează de două ori și se obține

$$x^2y' + 3xy - y = 0 \text{ cu soluția } yx^3 = Ce^{-\frac{1}{x}}.$$

1003. $Py' + P'y = (Py)'$. Se deduce $y' + Py = C$.

Soluția generală este

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C\int e^{\int P\,dx}\,dx + C_1\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

1004. $z = \lambda x^2 - \frac{1}{3x}$. **1005.** Integrarea conduce la a distinge trei cazuri:

$$\text{a) } -2 < x < 2, \quad y_1 = \frac{\lambda_1 - 2 \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{b) } x > 2, \quad y_2 = \frac{\lambda_2 + 2 \operatorname{arg\,ch} \frac{x}{2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\text{c) } x < -2, \quad y_3 = \frac{\lambda_3 - 2 \operatorname{arg\,ch} \left(-\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Dacă vrem o integrală continuă pentru $x = 2$, trebuie luat $\lambda_1 = \pi$ și $\lambda_2 = 0$. Limita comună a lui y_1 și y_2 este atunci 1. Dar y_1 este infinit pentru $x \to -2$ și nu e posibil de a găsi o integrală continuă în tot planul.

1006. $v = \frac{ds}{dt}$, deci $\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Ks^n$ de unde

$$\frac{ds}{s^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, dt. \quad \text{deci } s = \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right)(t - t_0)\sqrt{\frac{2k}{m}}\right]^{\frac{2}{-n-2}}$$

$n \neq 2$. Pentru $n = 2$ rezultă $\frac{ds}{s} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, t$;

$$s = e^{\sqrt{\frac{2k}{m}}(t - t_0)}$$

1007. După principiul energiei avem $\frac{1}{2} mv^2 = mg(y - y_0)$ și cum $v^2 = x'^2 + y'^2$ iar $y' = a$ rezultă $x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = a \frac{dx}{dy}$

Deci

$$\frac{1}{2} m \left[a^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + a^2\right] = mg(y - y_0) \text{ sau}$$

$$dx = \sqrt{\frac{2g}{a^2}(y - y_0) - 1}\, dy. \text{ Integrînd, se obține}$$

$$x - C = \frac{a^2}{3g} \left(\frac{2g}{a^2}\right)^{3/2} \left(y - y_0 - \frac{a^2}{2g}\right)^3$$

Dacă se pune $x - C = X$ și $y - y_0 - \frac{a^2}{2g} = Y$ rezultă curba

$$\frac{9a^2}{8g} X^2 = Y^3.$$

(parabola lui Neil).

1008. Integrala singulară se obține scriind că ecuația dată are o rădăcină dublă în y' deci $y^6 - 4a^2x^2y^2 = 0$; $y = 0$ nu verifică ecuația, integrala singulară fiind $y^4 - a^2x^2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

1009. $y^2 - 2xy - x^2 = 0$ adică două drepte perpendiculare care trec prin O.

1010. $y^2 = 1 + x^2$. **1011.** $(x + y)^2 - 4ay = 0$.

1012. Derivînd se obține $(yy' - a)\left(1 + y'^2 + y\frac{dy'}{dx}\right) = 0$ de unde soluția singulară $y^2 = a^2 + 2ax$ iar cea generală $y^2 + (c - x)^2 = 2ac$.

1013. Scriind că y' este rădăcina dublă se obține $y(3 - 4y)^2(1 - y) = 0$ adică trei drepte $y = 1$ verifică ecuația este soluție singulară, $y = 0$ și $y = \frac{3}{4}$ nu verifică ecuația; $y = 0$ este locul punctelor de întoarcere ale integralei generale, iar $y = \frac{3}{4}$ locul punctelor de contact ale curbelor integrale $(x - c)^2 - y^2 + y^4 = 0$. (Fig. 55).

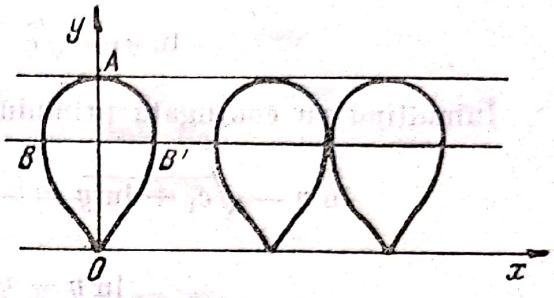

Fig. 55.

1014. $y = \lambda x^2 + \mu$. **1015.** Se face $\ln y' = u$, $\frac{y''}{y'} = u'$ și se obține $x\mu' = u - \ln x$, $u = c_1 x + \ln|x| + 1$ de unde $y = (k_1 x - k_1^2)e^{\frac{x}{k_1}+1} + k_2$.

1016. $y' = p$. Se obține $p = x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$ cu soluțiile $y = k_1 x(x - k_1) + k_2$ și $y = \frac{x^3}{3} + c$.

1017. $y = \frac{x}{2}\sqrt{\lambda^2 x^2 - 1} - \frac{1}{2\lambda}\operatorname{arg\,ch}\,\lambda x + \mu$

1018. $y' = p$, $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{px}{1+p^2}$ de unde $x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

Se face $p = \operatorname{tg}\varphi$ și rezultă $x = a\sin\varphi + c\cos\varphi$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ deci $dy = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(a\cos\varphi - c_1\sin\varphi)d\varphi$ de unde $y = c\sin\varphi - a\cos\varphi - c_1 \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + c_2$.

1019. $y' = p$ și rezultă $y = c_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c_2$, condițiile ne conduc la $y = x^3 + 3x + 1$.

1020. $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$. **1021.** $y = [\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]^2$

1022. $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ se obține $\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$ de unde $p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1 y - 1}$, integrînd se obține $(x + c_2)^2 = \frac{4}{c_1}\left(y - \frac{1}{c_1}\right)$ sau cu $\frac{1}{c_1} = k_1$ și $c_2 = k_2$, $(x + k_2)^2 = 4k_1(y - k_1)$.

1023. $2py\frac{dp}{dy} - 3p^2 = 4y^2$, $p^2 = z$, rezultă $y = \frac{k_1}{\cos^2(x + k_2)}$.

1024. $y' = pp\left[y(1 - \ln y)\frac{dp}{dy} + (1 + \ln y)p\right] = 0$, $p = 0$, $y = c$ și ecuația $\frac{dp}{p} = \frac{1 + \ln y}{y(\ln y - 1)}$, rezultă $y = e^{\frac{x+k_1}{x+k_1}}$.

1025. $\ln y = u(x)$, $y = e^u$, $y' = u'e^u$, $y'' = e^u(u'' + u'^2)$ se obține

$$u'' - u = 0,\ u = c_1e^x + c_2e^{-x},\ \text{deci}\ \ln y = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Altfel $y' = p$ și $p^2 = z$ conduce la $\dfrac{dy}{y\sqrt{c_1 + \ln^2 y}} = dx$, $\ln y = t$, și avem

$$x + c_2 = \ln(t + \sqrt{c_1 + t^2})\ \ x + c_2 = \ln\left[\ln y + \sqrt{c_1 + \ln^2 y}\right],$$

$$\ln y + \sqrt{c_1 + \ln^2 y} = e^{x+c_2}.$$

Înmulțind cu conjugata primului membru rezultă

$$\ln y - \sqrt{c_1 + \ln^2 y} = -\frac{c_1}{e^{x+c_2}},\ \text{adunînd se obține}$$

$$\ln y = k_1e^x + k_2e^{-x}.$$

1026. $y = \operatorname{tg} \ln|c_1x + c_2|$ **1027.** $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, deci $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = ay''$; $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ rezultă $\dfrac{dy}{a} = \dfrac{pdp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$ de unde $\dfrac{y - y_0}{a} = -\dfrac{1}{1 + p^2}$ sau

$p = \dfrac{\sqrt{a^2 - (y - y_0)^2}}{\pm(y - y_0)}$ deci $\dfrac{\pm(y - y_0)dy}{\sqrt{a^2 - (y - y_0)^2}} = dx$, $x - x_0 = \pm\sqrt{a^2 - (y - y_0)^2}$

sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ curbele sînt cercuri.

1028. Luînd dreapta fixă ca axă Oy se obține $1 + y'^2 = ay''$ cu soluția $y + k_1 = -a \ln\cos\dfrac{x + k_1}{a}$ unde $k_1 = a \ln c_1$ și $k_2 = c_2$.

1029. Ecuația este $ky^3y'' = 1$ cu soluția

$$(c_1x + c_2)^2 = c_1y^2 - \frac{1}{k},\ \text{o familie de conice.}$$

1030. Schimbarea $y = e^{\int zdx}$, $y' = ze^{\int zdx}$, $y'' = (z' + z^2)e^{\int zdx}$ ne conduce la ecuația Riccati $x^2z' - x^2z^2 + xz + 1 = 0$ care admite pe $z_1 = \dfrac{1}{x}$ soluție particulară. Se face $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{u}$; $y = \dfrac{c_2x}{x^2 + 2c_1}$.

1031. $y = c_2xe^{\frac{c_1}{x}}$. **1032.** $y = c_2\sqrt{x^2 + c_1}$ **1033.** $y = e^{\int zdx}$ apoi $xz = u$ și se obține $u = \dfrac{k_1^2x^2 - 1}{2k_1x}$ și apoi $2\ln|c_2y| = \dfrac{x}{c_1} + \dfrac{c_1}{x}$.

1034. $y = e^{\int zdx}$ conduce la ecuația Riccati $x^2z' + 2x^2z^2 - 5xz + 4 = 0$ cu soluția particulară $z_1 = \dfrac{1}{x}$; se obține $y = c_2x\sqrt{c_1 - x^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XV

ECUAŢII LINIARE DE ORDINUL n

1035. $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$. Soluţia particulară $c_1 = -\frac{1}{15}$, $c_2 = \frac{16}{15}$.

1036. Presupunem rădăcini distincte, trebuie să rezolvăm sistemul următor în c_1 şi c_2

$$y_1 = c_1e^{r_1x_1} + c_2e^{r_2x_1},\quad y_2 = c_1e^{r_1x_2} + c_2e^{r_2x_2}$$

Determinantul necunoscutelor este $\Delta = e^{r_1x_1+r_2x_2} - e^{r_1x_2+r_2x_1}$ care-i diferit de zero, căci $r_1x_1 + r_2x_2 \neq r_1x_2 + r_2x_1$ sau $r(x_1 - x_2) \neq r_2(x_1 - x_2)$ şi $r_1 = r_2$.

Raţionament analog pentru $r_1 = r_2$.

1037. Sîntem conduşi la sistemul:

$$c_1 \cos \beta x_1 + c_2 \sin \beta x_1 = y_1e^{-\alpha x_1},$$

$$c_1 \cos \beta x_2 + c_2 \sin \beta x_2 = y_2e^{-\alpha x_2}.$$

$\left(\alpha = -\frac{b}{2a}\right)$ care nu are totdeauna soluţii căci determinantul $\Delta = \sin \beta(x_2 - x_1)$ este nul pentru $x_2 - x_1 = \frac{k\pi}{\beta}$. Problema este atunci imposibilă afară de cazul cînd $y_2e^{-\alpha x_2} = (-1)^k y_1e^{-\alpha x_1}$, în acest caz, soluţia este definită în afara unui factor constant.

1038. Mulţimea soluţiilor este $y = 2\lambda e^{2x} + \mu e^x$.

Va exista contact cu curba $y = e^{3k}$ dacă ecuaţia $e^{3k} = 2\lambda e^{2x} + \mu e^x$ sau $t^3 - 2\lambda t^2 - \mu t = 0$ are o rădăcină dublă. Trebuie ca $\lambda^2 + \mu = 0$, de unde familia de curbe cerută $y = 2\lambda e^{2x} - \lambda^2 e^x$.

1039. 1) Derivînd (1) se obţine pentru $y \in (E)$;

(2) $y''' + py'' + qy' = 0$ care exprimă că y' verifică (1) deci $y' \in (E)$.

2) Punînd $y = ay_1 + by_2$ avem $y' = a_1y_1 + b_1y_2$ şi proprietăţile derivatei arată că aplicaţia $(a, b) \to (a_1, b_1)$ este liniară. Condiţia $V' = kV$ se scrie

$$ay_1 + by_2' = kay_1 + kby_2.$$

Dacă este adevărată oricare ar fi a şi b, se deduce

$$y_1' = ky_1 \quad y_2' = ky_2$$

de unde

$$\frac{y_1'}{y} = \frac{y_2'}{y_2} \text{ şi } y_1 = ky_2.$$

Funcţiile y_1 şi y_2 nu sînt independente, ceea ce este contrar ipotezei.

3) Fie A matricea operatorului precedent, cu

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\quad X' = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ Avem } X' = AX$$

Vectorul V'' corespunzător lui y'' este astfel că $X'' = AX' = A^2X$.

Pentru că $X'' + pX' + qX = 0$ se obţine $(A^2 + pA + qI)X = 0$. Fiind valabilă ecuaţia pentru o matrice arbitrară X avem

(3) $A^2 + pA + qI = 0$

Descompunerea formală $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ valabilă pe corpul complexelor permite de a transforma primul membru
Înlocuind x cu A şi x_0 prin I se obţine

$$(A - r_1 I)(A - r_2 I) = 0$$

Dacă una dintre matricele $A - r_1 I$ sau $A - r_2 I$ are o inversă, cealaltă va fi nulă şi o egalitate $A = rI$ este imposibilă după proprietatea demonstrată la finele paragrafului 2).

Determinantul $|A - rI|$ este polinomul caracteristic al lui A, care-i de gradul doi în r, cu primul termen r^2, se anulează pentru $r = r_1$ şi $r = r_2$. Avem deci:

$$|A - rI| = r^2 + pr + q.$$

Invers, cunoscînd două numere distincte λ şi μ astfel ca

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) = 0$$

avem

$$A^2 - (\lambda + \mu)A - \lambda\mu I = 0$$

comparînd cu (3) se obţine

$$(p + \lambda + \mu)A + (q - \lambda\mu)I = 0.$$

Se deduce

$$p = -(\lambda + \mu);\ q = \lambda\mu$$

remarcînd că A nu este proporţională cu I.

1040. $y = c_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

1041. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x$.

1042. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$.

1043. Ecuaţia caracteristică $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$ are pe

$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ rădăcini duble

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_3 + c_4 x)e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

1044. $r_1 = 2i$ $r_2 = -2i$ sînt rădăcini duble.

$$y = (c_1 + c_3 x)\cos 2x + (c_2 + c_4 x) \sin 2x.$$

1045. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$.

1046. Soluţia generală $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{ax} + c_4 e^{-ax}$

Se dezvoltă după Mac-Laurin

$$y = y(0) + \frac{x}{1}y'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \ldots$$

Condiţia din enunţ implică

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \text{ şi } \frac{y'''(0)}{3!} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

adică sistemul:

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 + c_4 &= 0 & c_1 &= 0 \\ c_2 + ac_3 - ac_4 &= 0 & c_2 &= -\frac{6}{a^2} \\ a^2c_3 + a^2c_4 &= 0 & c_3 &= \frac{3}{a^3} \\ a^3(c_3 - c_4) &= 6 & c_4 &= -\frac{3}{a^3} \end{aligned}$$

deci curba căutată este

$$y = -\frac{6x}{a^2} + \frac{6}{a^3}\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right) = \frac{6}{a^3}(\operatorname{sh} ax - ax).$$

Ecuații neomogene.

1047. $y_0 = c_1e^x + c_2e^{-\frac{x}{3}}$ este soluția ecuației omogene; integrala particulară este un polinom de gradul doi $y_p = ax^2 + bx + c$. Scriind că y_p verifică identic ecuația obține $my_p = -x^2 + 4x - 14$, deci $y = y_0 + y_p = c_1e^x + c_2e^{-\frac{x}{3}} - x^2 + 4x - 14$ este integrala generală.

1048. Integrala particulară este de forma $y_p = Ae^x$ rezultă $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + 2e^x$.

1049. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - \frac{xe^{3x}}{10}$. **1050.** Se caută o soluție particulară de forma $y_p = \lambda \cos x + \mu \sin x$, $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 2\cos x - \sin x$.

1051. $y_p = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.

$$y = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^x + \frac{3}{85}\sin 2x - \frac{29}{85}\cos 2x.$$

1052. $y = e^x(c_1x + c_2) + e^x\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{12}\right)$.

1053. $y = c_1e^{2x} + c_2e^x - e^{2x}\left(\frac{\sin 3x}{10} + \frac{\cos 3x}{30}\right)$.

1054. $y = c_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x$.

1055. $y = -\frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{6}\cos 2x + \frac{1}{2}$.

1056. $y_p = e^{-x}\left(-\frac{x}{10}\cos 2x + \frac{1}{25}\sin 2x\right)$.

1057. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x} + \frac{7}{4}xe^x \sin 2x$.

1058. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{50}e^{3x} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5}x \sin x$.

Scanned with OKEN Scanner

1059. Se face $y = ze^{\alpha x}$ şi se obţine:

$$e^{\alpha x}[z'' + z'\varphi'(\alpha) + z\varphi(\alpha)] = e^{\alpha x}P(x)$$

sau (1) $z'' + z'\varphi'(\alpha) + z\varphi(\alpha) = P(x)$ unde $\varphi(r)$ este polinomul caracteristic.

Se obţin cazurile

1) $\varphi(\alpha) \neq 0$ atunci ecuaţia (1) are ca soluţie particulară un polinom $Q(x)$ de gradul n. Deci ecuaţia dată are ca integrală particulară $e^{\alpha x}\ Q(x)$.

2) dacă $\varphi(\alpha) = 0$ iar $\varphi'(\alpha) \neq 0$ ecuaţia (1) are ca integrală particulară pe $xQ(x)$ şi deci ecuaţia dată are ca integrală particulară $e^{\alpha x}xQ(x)$.

3) $\varphi(\alpha) = 0$, $\varphi'(\alpha) = 0$ ecuaţia (1) are pe $x^2Q(x)$ integrală particulară deci ecuaţia dată are pe $e^{\alpha x}x^2Q(x)$ ca integrală particulară.

1060. Se caută o integrală particulară de forma

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

pentru că 2 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Se găseşte

$$y_p = (x^2 - 1)e^{2x}$$

deci

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + (x^2 - 1)e^{2x}.$$

1061. 1, fiind rădăcină a ecuaţiei caracteristice se caută o soluţie particulară de forma

$$(ax^3 + bx^2 + cx)e^x;\ y = c_1e^x + c_2e^{2x} + (x^3 - 2x^2 + 3x)e^x.$$

1062. $\frac{1}{3}$ este rădăcină dublă a ecuaţiei caracteristice; soluţia particulară va fi de forma $(ax^3 + bx^2)e^{\frac{x}{3}}$.

Se obţine:

$$y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{x}{3}} + (2x^3 - x^2)e^{\frac{x}{3}}.$$

1063. Primul membru este $y'' - 6y' + 9y = 0$. Făcînd aici $y = (3x+1)e^x$ se obţine membrul doi

$$f(x) = (12x - 8)e^x;$$

deci

$$y'' - 6y' + 9y = (12y - 8)e^x.$$

1064. $y = \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} - xe^{-2x}$. Soluţia particulară corespunde la $\mu = 0$ şi $\lambda = -1$.

1065. Schimbarea $y = ze^{-\lambda x}$ conduce la $z'' + \lambda^2 z = \lambda \cos \lambda x$. Se deduce apoi $y = \left(c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x + \frac{x}{2} \sin \lambda x\right) e^{-\lambda x}$. Soluţia particulară corespunde la $c_1 = 0$ şi $c_2 = \frac{e^{\lambda}}{\sin \lambda} - \frac{1}{2}$. Pentru o valoare dată lui x, $\lim_{\lambda \to 0} y(x, \lambda) = y(x, 0) = x$.

Scanned with OKEN Scanner

1066. Se vede că $u'' - u = 0$ de unde $u = A_1 \operatorname{ch} x + A_2 \operatorname{sh} x$ și soluția ecuației $y'' + y = A_1 \operatorname{ch} x + A_2 \operatorname{sh} x$ este $y = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x + C \cos x + D \sin x$. $\left(A = \frac{A_1}{2},\ B = \frac{B_1}{2}\right)$. Integrala particulară este de forma

$$y = A \operatorname{ch} x + C \cos x \text{ cu } A + C = 3.$$

Desfășurarea $y = A + C + \frac{1}{2}(A - C)x^2 + \varepsilon x^3$ pune în evidență o parabolă de axă Oy și parametru $\frac{1}{A - C}$ și al cărui centru de curbură în vîrf, confundat cu al celui al curbei căutate, are ca ordonată $y = A + C + \frac{1}{A - C} = 2$. Se deduce $A = 1$, $C = 2$.

1067. Soluția generală este $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + c_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{6} x^3\right)$ $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = 0$ și $y = c_3 e^{-x} + \frac{1}{6} x^3$.

1068. Ecuația se scrie $x(y'' - 5y' + 6y) + y'' - 6y' + 8y = 0$.

Ecuațiile $y'' - 5y' + 6y = 0$ și $y'' - 6y' + 8y = 0$ au soluția comună $y_1 = e^{2x}$. Se face apoi schimbarea $y = ze^{2x}$, obținîndu-se ecuația $(1 + x)z'' - (2 + x)z' = 0$ cu $z' = \mu$ se reduce la ordinul întîi, rezultă $\mu = c(1 + x)e^x$ etc.

1069. Ecuația se scrie: $(y''' + y') \sin x - (y'' + y) \cos x = 0$ se face $y'' + y = z \to z' \sin x - z \cos x = 0$ de unde $z = c \sin x$ iar y este dat de $y'' + y = c \sin x$ etc.

1070. Trebuie ca $x'' = px'^2$, iar în cazul particular $xx'' = nx'^2$ ecuația nu conține pe t, sau omogenă în x, x', $x'' \to x = t^{-\frac{1}{n-1}}$ și ecuația $(n - 1)y'' + my = 0$ cu coeficienți constanți.

1071. Se demonstrează ușor înlocuind $\cos \alpha x$ și $\sin \alpha x$ date de formulele lui Euler, aplicăm apoi rezultatele de la 1053.

1072. Integrala particulară este de forma

$$y_p = (ax^2 + bx + c) \cos 3x + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \sin 3x.$$

Se introduce în ecuație și primul membru ia forma $f(x) \cos 3x + \varphi(x) \sin 3x$ unde $f(x)$ și $\varphi(x)$ sînt trinoame de gradul doi. Identificînd $f(x)$ cu

$$-3x^2 - 23x + 12 \text{ și } \varphi(x) \text{ cu } 11x^2 - 5x - 5$$

se obține

$$y_p = (x - 1) \cos 3x - x^2 \sin 3x$$

deci

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + (x - 1) \cos 3x - x^2 \sin 3x.$$

1073. $y_p = x(ax + b) \cos 2x + x(a_1 x + b_1) \sin 2x$. Se obține

$$y_p = -\frac{1}{8} x^2 \cos 2x + \frac{1}{16} x \sin 2x$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{8} x^2 \cos 2x + \frac{1}{16} x \sin 2x.$$

Scanned with OKEN Scanner

1074. Se consideră ecuaţiile :

$$u^{(IV)} - u = xe^x \text{ şi } v^{(IV)} - v = \cos x.$$

Pentru prima se caută o soluţie particulară

$$u_p = x(ax + b)e^x$$

iar pentru a doua

$$v_p = x(\lambda \cos x + \mu \sin x).$$

Se obţine

$$u_p = -\frac{1}{8}x(x - 3)e^x$$

$$v_p = -\frac{1}{4}x \sin x ;$$

deci

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3e^{-x} + \frac{1}{8}x(x - 3)e^x - \frac{1}{4}x \sin x.$$

1075. Ecuaţia din enunţ devine

$$rf''(r) + 2f'(r) - m^2rf(r) = 0.$$

Notînd $rf(r) = \varphi(r)$ ecuaţia devine

$$\varphi''(r) - m^2\varphi(r) = 0$$

a cărei integrală generală este

$$\varphi(r) = Ae^{mr} + Be^{-mr}$$

deci

$$f(r) = \frac{1}{r}(Ae^{mr} + Be^{-mr}).$$

1076. Ecuaţia omogenă $y'' + y = 0$ are soluţia

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Se caută pentru ecuaţia completă o soluţie de forma $y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. Sistemul care dă pe $c_1(x)$ şi $c_2(x)$ este

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$$
$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x$$

de unde

$$c_1'(x) = -\sin x \operatorname{tg} x, \quad c_2'(x) = \sin x$$

$$c_1(x) = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c_1,$$

$$c_2(x) = -\cos x + c_2$$

deci

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

1077. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|.$

1078. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{\cos 2x}{2 \cos x}.$

Scanned with OKEN Scanner

1079. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ este soluția ecuației omogene. Se caută o soluție de forma

$y = e^{2x}(c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x)$. Se obține sistemul :

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ c_1'(x)(2 \cos x - \sin x) + c_2(x)(2 \sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{2x}[\cos x \ln|\cos x| + x \sin x].$$

1080. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} - e^{2x}\left(\arcsin \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{a} \ln \left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|\right)$.

1081. $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \dfrac{1}{x}$. **1082.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

1083. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{2x} \operatorname{arc\,tg} e^x - e^x \ln \sqrt{1 + e^{2x}}$.

1084. Se caută soluții de forma $y = x^r$. Ecuația caracteristică este

$$r^2 - r - 6 = 0 ; \; r_1 = -2, \; r_2 = 3.$$

Integralele particulare sînt

$$y_1 = x^{-2}, \; y_2 = x^3,$$

deci

$$y = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2 x^3.$$

1085. Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$, $y = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x$.

1086. Ecuația caracteristică $(r + 1)(r - 1)^2 = 0$;

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 x + c_3 x \ln|x|.$$

1087. Ecuația caracteristică $(r - 1)^3 = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$;

$$y = x(c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \ln^2|x|),$$

1088. Schimbarea de variabilă $x = e^t$ ne conduce la ecuația

$$y_t'' + y = e^t$$

cu soluția

$$y = \frac{1}{2} e^t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

de unde

$$y = \frac{1}{2} x + c_1 \cos (\ln x) + c_2 \sin (\ln x), \quad x > 0.$$

1089. Se înmulțește ecuația cu x se obține ecuația Euler

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 4x y' = x \ln x.$$

Schimbarea $x = e^t$ conduce la $y_t''' + 2y_t'' + y_t' = te^t$. Ecuația caracteristică $r(r + 1)^2 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = r_3 = -1$ iar soluția particulară este de forma $(At + B)e^t$. Se obține

Scanned with OKEN Scanner

$$y = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + \frac{1}{4}(t-2)e^t$$

sau

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3 \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{4}(\ln x - 2), \quad x > 0.$$

1090. $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^5}{12}\left(\ln x - \frac{7}{12}\right), \quad x > 0.$

1091. Se scrie:

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln^3 x}{x} \qquad x = e^t$$

conduce la

$$y''_{t^2} - y'_t + y = t^3 e^{-t}.$$

Soluția particulară este de forma

$$(at^3 + bt^2 + ct + d)e^{-t}.$$

Se obține:

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{8}(2t^3 + 6t^2 + 9t + 6)e^{-t}$$

de unde

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{1}{8x}(2\ln^3 x + 6\ln^2 x + 9\ln x + 6), \quad x > 0.$$

1092. $x = e^t$ conduce la

$$y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 4y'_t - 2y = e^t \sin t = e^t \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Se consideră ecuațiile:

$$u''' - 3u'' + 4u' - 2u = \frac{1}{2i} e^{(1+i)t}$$

$$v''' - 3v'' + 4v' - 2v = -\frac{1}{2i} e^{(1-i)t}$$

$\varphi(r) = 0$ pentru $r_1 = 1$, $r_2 = 1 - i$, $r_3 = 1 + i$.

Integralele particulare sînt:

$$u_0 = \frac{Ate^{\alpha t}}{\varphi'(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2i} te^{(1+i)t}}{\varphi'(1+i)} = -\frac{1}{4i} te^{(1+i)t}$$

$$v_0 = \frac{-\frac{1}{2i} te^{(1-i)t}}{\varphi'(1-i)} = \frac{1}{4i} te^{(1-i)t}$$

$$y_0 = u_0 + v_0 = \frac{1}{2} te^t \sin t,$$

deci

$$y = c_1 e^t + e^t(c_2 \cos t + c_3 \sin t) - \frac{1}{2} te^t \sin t,$$

unde $t = \ln x$, $x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

1093. Se împarte cu $x+1$ şi se obţine ecuaţia Euler

$$(1+x)^2y'' + 3(1+x)y' + y = \frac{6\ln(1+x)}{1+x}$$

Soluţia ecuaţiei omogene este

$$y = \frac{k_1}{1+x} + k_2\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

Se aplică metoda variaţiei constantelor

$$k_1'(x)\frac{1}{1+x} + k_2'(x)\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

$$-k_1'(x) + k_2'(x)[1-\ln(1+x)] = \frac{6\ln(1+x)}{1+x}$$

Se obţine

$$y = \frac{1}{1+x}[k_1 + k_2\ln(1+x) + \ln^3(1+x)],\ x+1>0.$$

1094. Ecuaţia planului osculator în punctul $M(x, y, z)$ este

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-Z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$ (X, Y, Z) un punct curent din planul osculator

Înlocuind obţinem:

$$\begin{vmatrix} X-t & Y-\mathrm{f}(t) & Z-t^2 \\ 1 & \mathrm{f}'(t) & 2t \\ 0 & \mathrm{f}''(t) & 2 \end{vmatrix} = 0$$ Prin ipoteză

$P(0, 0, t^2)$ este în planul osculator; deci

$$\begin{vmatrix} -t & -\mathrm{f}(t) & -t^2 \\ 1 & \mathrm{f}'(t) & 2t \\ 0 & \mathrm{f}''(t) & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } t^2\mathrm{f}''(t) - t\mathrm{f}'(t) + \mathrm{f}(t) = 0$$

cum $y = \mathrm{f}(t)$ soluţia ecuaţiei Euler

$$t^2y'' - ty' + y = 0 \text{ este } y = c_1t + c_2t\ln|t|.$$

Ecuaţia curbei este

$$\bar{r} = t\bar{i} + (c_1t + c_2t\ln|t|)\bar{j} + t^2\bar{k}.$$

1095. Procedînd ca mai sus obţinem ecuaţia

$$x^2\mathrm{f}''(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x) = 0 \text{ cu soluţia } \mathrm{f}(x) = c_1x + \frac{c_2}{x}.$$

1096. Se face $y = y_1z$ adică $y = zx$, se obţine

$$y = c_1x + c_2\left(x\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right),\ |x|<1.$$

Scanned with OKEN Scanner

1097. $y = x^2z$ rezultă $y = c_1x^2 + c_2e^x$.

1098. e^{mx} verifică ecuația dacă $m = -2$. Se face $y = ze^{-2x}$ și se obține soluția $y = c_1e^{-2x} + c_2(4x^2 + 1)$.

1099. $y = c_1e^{2\sqrt{x}} + c_2e^{-2\sqrt{x}}$.

1100. $y = c_1 \cos k(\arcsin x) + c_2 \sin k\,(\arcsin x)$.

1101. Ecuația devine :

$$\frac{(1+\varphi^2)^2}{\varphi'^2}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1+\varphi^2}{\varphi'}\left[-(1+\varphi^2)\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + 2\varphi\right]\frac{dy}{dt} + 4y = \varphi.$$

Va trebui ca $-(1+\varphi^2)\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + 2\varphi = 0$ sau

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2\varphi\varphi'}{1+\varphi^2} \text{ deci } \ln\varphi' = \ln c_1(1+\varphi^2);$$

$$\varphi' = c_1(1+\varphi^2);\ \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} = c_1dt,$$

rezultă

$$\operatorname{arc\,tg}\varphi = c_1t + c_2,\ \varphi = \operatorname{tg}(c_1t + c_2).$$

Pentru $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $\varphi = \operatorname{tg} t$ și ecuația devine $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \operatorname{tg}\ t$. Se aplică metoda variației constantelor. Se obține soluția

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin\ 2t - \frac{1}{2}t \cos\ 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \ln|\cos t|$$

1102. Fie I un interval oarecare pe care $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sînt trei funcții continui ; $a(x)$ nu se anulează ; dacă (y_1, y_2) este o bază a spațiului vectorial al soluțiilor, aceasta este o pereche de funcții definite pe I, de clasă C^2. Funcțiile derivate $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ nu sînt în general soluții ale ecuației diferențiale (în afară de cazul cînd a, b, c sînt constante) și nu aparțin deci spațiului vectorial precedent.

Este deci imposibil de a asocia operatorului de derivare o matrice M care să nu fie decît cu coeficienți constanți.

Se poate totuși considera problema în modul următor. Vom admite că este posibil de a determina două funcții α și β astfel ca

$$(\forall x \in I) : \frac{dy_1(x)}{dx} = \alpha(x)y_1(x) + \beta_2(x)y_2(x)$$

α și β fiind continui și derivabile pe I, această pereche nu este de altfel unică și dacă (α, β) este o pereche convenabilă, $(\alpha + \rho y_2,\ \beta - \rho y_1)$ (unde ρ este o funcție derivabilă pe I oarecare) este o altă pereche. De exemplu dacă y_1 nu se anulează pe I avem perechea soluție $\alpha = \frac{1}{y_1}\frac{dy}{dx}$, $\beta = 0$, vom admite în mod analog existența lui γ și δ, derivabile pe I, astfel ca

$$(\forall x \in I)\,\frac{dy_2(x)}{dx} = \gamma(x)y_1(x) + \delta(x)y_2(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate deci scrie :

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

de unde dacă $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ este o soluție a ecuației (1)

$$y' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2$$

$$\text{cu } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \text{ unde } M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Bineînțeles λ_1 și μ_1 nu sînt constante (contrar lui λ și μ) și matricea M nu este unică. Se va putea scrie în aceste condiții :

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2y_1}{dx^2} \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} + M'(x) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [M^2(x) + M'(x)] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

și a considera că matricea $M^2 + M'$ este asociată operatorului derivatei a doua. Dacă $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ este o soluție oarecare a ecuației (1), vom avea $y'' = \lambda_2(x) y_1 + \mu_2(x) y_2$ cu

$$\begin{bmatrix} \lambda_2(x) \\ \mu_2(x) \end{bmatrix} = [M^2(x) + M'(x)] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

și ecuația (1) se poate scrie :

$$[a(x)[M^2(x) + M'(x)] + b(x)M(x) + c(x)I] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0$$

pentru orice (λ, μ), adică

$$\text{(E)} \quad a(x)[M^2(x) + M'(x)] + b(x)M(x) + c(x)I = 0$$

dacă M este constantă, condiția precedentă, se scrie (calculînd M^2)

$$(\forall x \in I) \begin{cases} a(x)(\alpha^2 + \beta\gamma) + b(x)\alpha + c(x) = 0 \\ \beta[a(x)(\alpha + \delta) + b(x)] = 0 \\ \gamma[a(x)(\alpha + \delta) + b(x)] = 0 \\ a(x)(\delta^2 + \beta\gamma) + b(x)\delta + c(x) = 0 \end{cases}$$

ceea ce este realizat pentru :

a) $\beta = \gamma = 0$ și $(\forall x \in I)$

$$\alpha^2 a(x) + \alpha b(x) + c(x) = 0$$
$$\delta^2 a(x) + \delta b(x) + c(x) = 0$$

adică dacă $\alpha \neq \delta$

$$b(x) = -(\alpha + \delta)a(x)$$
$$c(x) = \alpha\delta a(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

b) β sau $\gamma \neq 0$ $(\forall x \in I)$ $\begin{cases}(\alpha+\delta)a(x)+b(x)=0\\(\alpha^2+\beta\gamma)a(x)+\alpha b(x)+c(x)=0\\(\delta^2+\beta\gamma)a(x)+\delta b(x)+c(x)=0\end{cases}$

adică

$$b(x) = -(\alpha+\delta)a(x)$$

$$c(x) = (\alpha\delta-\beta\gamma)a(x)$$

egalitatea care este încă valabilă dacă $\alpha=\delta$ și conține și cazul precedent. Se va observa că în acest caz $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ sînt constante, ecuația se va reduce la o ecuație cu coeficienți constanți.

c) $\alpha=\delta$, $\beta=\gamma=0$, pentru care subsistă singura condiție $(\forall x \in I)$ $\alpha^2a(x)+\alpha b(x)+c(x)=0$ în acest caz, cele două soluții verifică ambele

$$y_1' = \alpha y_1 \text{ și } y_2' = \alpha y_2$$

3) Aplicația propusă nu poate aparține cazului precedent, decît dacă există o soluție exponențială $y_1 = e^{\alpha x}$, adică dacă există $\alpha \in R$ astfel ca:

$$(\forall x)\ \alpha^2(x^2+x+1)+\alpha(2x^2+1)-2(2x+1)=0$$

adică

$$\alpha^2+2\alpha=0;\ \alpha^2-4=0;\ \alpha^2+\alpha-2=0..$$

de unde rezultă $\alpha=-2$. Se notează $y=e^{-2x}z$; $y'=-2e^{-2x}z+e^{-2x}z$; $y''=4e^{-2x}z-4e^{-2x}z'+e^{-2x}z''$

se obține astfel:

$$(x^2+x+1)z''-(2x^2+4x+3)z'=0$$

de unde:

$$\frac{z''}{z'}=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}=2+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$z' = ce^{2x}(x^2+x+1);\ z=\frac{c}{2}e^{2x}(x^2+1)+\mu.$$

Soluția generală a ecuației (2) este

$$y=\lambda(x^2+1)+\mu e^{-2x}.$$

INTEGRAREA PRIN SERII

1103. $y_1(x)\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$. Derivînd se obține ecuația

$$y(1-x^2)-xy=1,$$

se vede că y_1 este soluție.

Căutăm $y_1(x)=\sum_0^\infty a_nx^n$ cu $a_0=0$, identificînd

$$a_1+\sum_1^\infty[(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}]x^n=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$a_1 = 1,\ (n+1)a_{n+1} = na_{n-1},\ n \geqslant 1.$$

Pentru $n = 1$ avem $2a_2 = a_0 = 0$; rezultă că coeficienții de indici pari sînt nuli.

$$3a_3 = 2a_1,\ 5a_5 = 4a_3,\ (2p+1)a_{2p+1} = 2pa_{2p-1}$$

Multiplicînd membru cu membru, se determină

$$a_{2p+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2p}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

deci

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\, x^{2p+1}$$

în raza de convergență 1. Integrînd se obține dezvoltarea lui $Z(x)$.

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p}(p)!}{(2p+1)}\, x^{2p+2}$$

1104. $x \geqslant 0$. Pentru $x > 0$ avem

$$\cos x^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{x^3}{2} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{3p}}{(2p)!} + \ldots$$

Înlocuind y prin $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ în ecuație și egalînd coeficienți cu zero, se obține mai întîi $a_0 = 0$, $a = 1$, apoi $a_n = 0$ pentru $n \neq 3p+1$ iar pentru $n = 3p+1$, avem

$$(2n+1)a_n = \frac{3(-1)^p}{(2p)},$$

deci

$$a_{3p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

Soluția este

$$y_1(x) = x - \frac{x^4}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^p x^{3p+1}}{(2p+1)!} + \ldots$$

cu raza de convergență infinită.

1105. Funcția y_1 verifică ecuația:

$$2xy' + y = 3x \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{3p}}{(2p)!}$$

Integrarea directă duce la expresiile următoare:

— pentru $x > 0$

$$y = \frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

— pentru $x < 0$

$$y = \frac{\operatorname{sh}[(-x)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția dezvoltată în serie întreagă corespunde la $\lambda = 0$. Se poate arăta printr-o însumare directă a seriei obținute.

1106. Ecuația este de forma $y' + p(x)y = 0$ cu $p(x) = \frac{p_0 + p_1 x}{x}$ care este continuă pe orice interval în care x are un semn constant. Integrala este

$$y = ce^{-\int p(x)dx} = c|x|^{-p_0} \cdot e^{-p_1 x}$$

Pentru că $e^{-p_1 x}$ este analitică, soluția găsită este de asemenea dacă p_0 este un întreg negativ sau nul.

Seria $\lambda x^{-p_0} e^{-p_1 x}$ se obține luînd $c = \lambda$ pentru $x > 0$ și $c = -\lambda$ pentru $x < 0$. Se regăsește acest rezultat căutînd o serie soluție $y = \sum_0^\infty a_n x^n$

Recurența se scrie $a_0 = 0$, $(n + p_0)a_n + p_1 a_{n-1} = 0$; $n \geqslant 1$.

Dacă $n + p_0 \neq 0$ toți coeficienții sînt nuli; dacă p_0 este un întreg natural, coeficientul ap_0 este arbitrar și coeficienții următori lui sînt proporționali. Se regăsește seria precedentă.

1107. Fie $y = \sum_0^\infty a_n x^n$, primul membru devine

$$y'' - xy = \sum_0^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_1^\infty a_{n-1}x^n$$

pentru $n = 0$, $a_2 = 0$

pentru $n \geqslant 1$ $(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = a_{n-1}$

sau încă, schimbînd n, cu $n + 1$

$$(n + 3)(n + 2)a_{n+3} + a_n.$$

Dîndu-se arbitrari a_0 și a_1, se deduce

$$a_{3p} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3p-2)}{(3p)!} a_0, \quad a_{3p+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3p-1)}{(3p+1)!} a_1$$

$$a_{3p+2} = 0.$$

Luînd apoi $a_0 = 1$, și $a_1 = 0$ apoi $a_0 = 0$ și $a_1 = 1$ se formează două soluții particulare

$$y_1(x) = \sum_0^\infty a_{3p}x^{3p} \text{ și } y_2(x) = \sum_0^\infty a_{3p+1}x^{3p+1}$$

convergente pe R și liniar independente. Ele constituie deci o bază a spațiului soluțiilor.

1108. Fie $y = \sum_0^\infty a_n x^n$.

Primul membru al ecuației are ca termen general

$$\left[\sum_0^\infty n(n-1)a_n + \sum_1^\infty (n-1)a_{n-1} - 2\sum_0^\infty a_n\right] x^n$$

$$n = 0, \quad a_0 = 0$$

$$n \geqslant 1 \quad (n-2)(n+1)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$$

pentru $n = 1$ și $n = 2$ se obține $a_1 = 0$, coeficientul a_2 rămîne arbitrar.

Scanned with OKEN Scanner

Alegerea sa determină toți termenii seriei.

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{(n+1)!} 6a_2, \quad n \geqslant 3.$$

Soluțiile constituie un spațiu vectorial cu o dimensiune. Aceste serii sînt convergente pentru orice x.

$$S_{(x)} = a_2\left[1 - \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}\right]$$

1109. $y_1(x) = \frac{1}{1-x}$ cu raza $R = 1$ și $y_2(x) = x$

deci

$$y_1(x) = \frac{\lambda}{1-x} + \mu x \text{ valabil pentru } x \neq 1.$$

1110. $2a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; (n+2)(n+1)a_n = a_{n-2}, \; n \geqslant 2.$

Rezultă seria $\sum_0^\infty \frac{x^{2p}}{(2p+2)!}$ cu suma $g(x) = \frac{\operatorname{ch}x - 1}{x^2}$

cu raza infinită, $y(x) = -\frac{1}{x^2}$ este soluția particulară a ecuației date. Comparînd cu $g(x)$ se vede că $\frac{\operatorname{ch}x}{x^2}$ este soluție a ecuației omogene. Se deduce soluția generală:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2} + \lambda \frac{\operatorname{ch}x}{x^2} + \mu \frac{\operatorname{sh}x}{x^2}.$$

1111. Seria $\sum_0^\infty a_n x^n$ este soluție a lui (E) dacă coeficienții verifică relația de recurență:

$$a_n + (n+2)a_{n+2} = 0 \text{ cu } a_1 = 0.$$

Rezultă că $a_{2p+1} = 0$ iar $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(p!)^2 2^{2p}} a_0$.

Dacă se alege $a_0 = 1$ se obține J_0. Singurele soluții desfășurabile în serie întreagă sînt de forma $a_0 J_0$ și constituie un spațiu vectorial cu o dimensiune. Raza este infinită deci soluția valabilă pe $\mathbf{R}$.

1112. 1°. H este soluția lui (E) pe $\mathbf{R}^+$, pentru că φ este de două ori derivabilă și verifică relația

$$x\varphi'' + \varphi' + x\varphi = -2J_0'.$$

Cum J_0' este funcție impară se poate căuta pentru φ o funcție pară pe care o presupunem desfășurabilă în serie întreagă și nulă pentru $x = 0$, de unde $\varphi(x) = \sum_0^\infty c_p x^{2p}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce în relaţia precedentă şi se identifică

$$p = 1,\ 4c = 1\ ;\ p > 1,\ c_p + 4(p+1)^2 c_{p+1} = -4(p+1)a_{2p+2}$$

cu $a_{2p+2} = \dfrac{(-1)^{p+2}}{[(p+1)!]^2 2^{2p+2}}$. Pentru a rezolva recurenţa se alege c_p de forma indicată în enunţ. Înlocuind în relaţia precedentă se obţine pentru S_n, recurenţa

$$S_{p+1} - S_p = \frac{1}{p+1} \text{ cu } S_1 = 1.$$

Se găseşte $S_p = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$

Raza de convergenţă fiind infinită, soluţia H este valabilă pe $\mathbf{R}^+$.

2°. Pe $\mathbf{R}^+$, wronskianul $h = W[J_0, H]$ verifică relaţia

$$xh'(x) + h(x) = 0.$$

Avem deci $h(x) = \dfrac{\lambda}{x}$, unde λ este o constantă pe care o determinăm studiind pe $h(x)$ pentru x vecin de zero. Avem atunci

$$J_0 = 1 + x\varepsilon_1(x),\ J_0'(x) = x + x\varepsilon_2(x),$$

$$H(x) = \ln x + \varepsilon_3(x),\ H'(x) = \frac{1}{x} + \varepsilon_4(x),$$

(funcţiile $\varepsilon_i \to 0$ dată cu x). Prin urmare $h(x) = \dfrac{1}{x} + \varepsilon(x)$ de unde $\lambda = 1$.

Deci J_0 şi H sînt independente pe $\mathbf{R}^+$. Pe acest interval orice soluţie y a lui (E) este de forma :

$$y = \lambda J_0 + \mu H.$$

Dacă f este soluţie a lui (E) pe $\mathbf{R}$, se poate pune în particular sub forma precedentă pe $\mathbf{R}^+$.

Dacă $x \to 0$, $J_0 \to 1$ şi $H \to \infty$. Pentru că f trebuie să tindă către o limită finită, trebuie ales $\mu = 0$, de unde $f = \lambda J_0$.

1113. Se obţine $S(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \ldots$

Compararea cu J_0 este imediată $S(x) = J_0(ix)$.

Relaţia este aceeaşi cu cea dintre ch$x$ şi cos ix.

1114. Relaţia verificată de J_0 se scrie pentru valoarea Kx a variabilei,

$$KxJ_0''(Kx) + J_0'(Kx) + KxJ_0 = 0$$

Pentru că $y'(x) = KJ_0'(kx)$, $y''(x) = K^2 J_0''(kx)$.

Se obţine pentru y ecuaţia

$$xy'' + y' + k^2 xy = 0.$$

1115. 1) Funcţia $\cos(x \sin\theta)$ este de clasă C^∞.

Se poate aplica lui K derivarea sub semnul sumă.

$$K'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta \cdot \sin(x\sin\theta)\,d\theta$$

şi

$$K''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos(x \sin \theta)d\theta.$$

Prin urmare

$$xK''(x) + K'(x) + xK(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos^2\theta \cos(x \sin \theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \sin(x \sin \theta)d\theta.$$

O integrare prin părţi permite să arătăm că membrul doi este nul. K este soluţie a ecuaţiei Bessel. Soluţia rămîne finită pentru $x = 0$, pentru că $K(0) = 1$, rezultă $K = J_0$.

2) Se ajunge la acelaşi rezultat integrînd de la 0 la π dezvoltarea

$$\cos(x \sin \theta) = \sum_{0=1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p} \sin^{2p}\theta}{(2p)!}$$

Seria de funcţie de θ este normal convergentă pentru orice x, se poate deci integra, de unde

$$K(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} A_{2p}$$

$$A_{2p} = \int_0^{\pi} \sin^{2p}\theta \, d\theta = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p)!^2}\pi$$ care înlocuit în $K(x)$ ne dă $J_0(x)$.

3) Ne rezumăm la $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta)d\theta.$$

Este suficient de a efectua schimbarea $\mu = x \sin \theta$ pentru a obţine expresia cerută. Ea este valabilă pentru $x > 0$, pentru $x < 0$ se schimbă x în $-x$, în marginea superioară a integralei, J_0 fiind pară, ne putem limita la $\mathbf{R}_+$.

1116. Ecuaţia (E) se obţine uşor

$$(E)\; xY'' + (2h + 1)Y' + xY = 0.$$

Înlocuind $Y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ se obţine $a_1 = 0$

$$a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2h+1)}$$. Funcţia este pară.

Rezolvînd recurenţa se găseşte

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(h+1)}, \ldots, a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}p!(h+1)\ldots(h+p)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind funcţia permite simplificarea coeficienţilor, luînd $a_0 = \frac{1}{2^h} \cdot \frac{1}{\Gamma(h+1)}$ avem $a_2 = -\frac{1}{2^{h+2}(h+1)\,\Gamma(h+1)} = -\frac{1}{2^{h+2}\Gamma(h+2)}, \ldots a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p\,!\Gamma(h+p+1)\cdot 2^{h+2p}}$.

Raza este infinită.

Revenind la $J_h(x)$, se obţine

$$J_h(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^h \left[\frac{1}{\Gamma(h+1)} - \frac{1}{1\,!\,\Gamma(h+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\,!\Gamma(h+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^p}{p\,!\Gamma(h+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \ldots\right]$$

valabilă pentru $x > 0$ (x^h, pentru h neîntreg, nu este definit decît pentru $x > 0$).

Dacă $h = n \in \mathbf{N}$, funcţia $J_h(x)$ este o serie întreagă soluţie a ecuaţiei Bessel pe $\mathbf{R}$.

Pentru că $\Gamma(n+p+1) = (n+p)\,!$

Seria se scrie:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n\,!} - \frac{1}{1\,!\,(n+1)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^p}{p\,!(n+p)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \ldots\right]$$

Pentru $n = 0$ se regăseşte J_0 din problemele precedente.

1117. Pentru $n = 1$.

$$J_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{x}{2} - \frac{1}{1\,!\,2\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^p}{p\,!(p+1)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} + \ldots.$$

Pe de altă parte

$$J_0' = -\frac{1}{1\,!}\frac{x}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^p}{(p-1)\,!p\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-1} + \ldots$$

Deci $J_1 = -J_0'$.

Această relaţie poate fi obţinută utilizînd ecuaţiile diferenţiale. J_0 verifică condiţia

$$J_0'' + \frac{1}{x}J_0' + J_0 = 0$$

sau derivînd

$$J_0''' + \frac{1}{x}J_0'' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)J_0' = 0.$$

Rezultă că J_0' este soluţie a ecuaţiei lui Bessel de primul ordin, desfăşurabilă în serie întreagă. Ea este proporţională cu J_1, de unde $J_1 = KJ_0'$. Se deduce K comparînd primii trei termeni ai dezvoltării. Pentru J_0' este $-\frac{x}{2}$ iar pentru J_1 este $\frac{x}{2}$; deci $J_1 = -J_0'$.

1118. Dacă avem $J_h'(\alpha) = 0$ vom deduce $J_h''(\alpha) = 0$, după ecuaţia diferenţială. Derivîndu-le de un număr oarecare de ori (căci J_h este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}_+$) se deduce $J_h^{(p)}(\alpha) = 0$ pentru orice p. Pentru că $J_h(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^h S(x)$ unde $S(x)$ este o serie întreagă totdeauna convergentă vom avea $S^{(p)}(\alpha) = 0$ pentru orice p. Aceasta antrenează $S(x) = 0$ pentru toate valorile lui x; ceea ce este imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

Fie α și β două rădăcini consecutive ale lui J_h; pentru că J_h este o funcție continuă are un semn determinat, de exemplu pozitiv în interval. Rezultă că $J_h'(\alpha) > 0$ $J_h'(\beta) < 0$ căci valorile nule sînt excluse.

1119. $\Delta V = 0$. Pentru $V_1 = V_1(r, \theta)e^{kz}$ se obține

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2} + K^2 V_1 = 0.$$

Dacă $V_1 = V_1(r)$ verifică ecuația $V_1'' + \frac{1}{r}V_1' + K^2 V = 0$

adică ecuația Bessel de parametru zero. Presupunînd că $V = V_1(r)e^{kz}$ rămîne finit în tot spațiul deci și pentru $r = 0$ (axa coordonatelor cilindrice). Singura soluție a ecuației Bessel acceptabilă este:

$$V_1(r) = \lambda J_0(kr).$$

În rezumat $J_0(kr)e^{kz}$ este o funcție armonică de revoluție în jurul lui Oz oricare ar fi k.

2) $V_1(r, \theta) = f(r), g(\theta)$. Ecuația de mai sus este cu variabile separabile. Ea se scrie:

$$\frac{r^2 f'' + rf' + k^2 r^2 f}{f} = -\frac{g''}{g}.$$

Rezultă că fiecare membru trebuie să fie constant; fie α valoarea comună.

Condiția $g'' + \alpha g = 0$ determină $g(\theta)$.

Pentru ca $V(r, \theta, z)$ nu trebuie să admită decît o valoare în orice punct trebuie ca $g(\theta)$ să fie periodică cu 2π sau $\frac{2\pi}{n}$ cu n întreg. Avem atunci $\alpha = n^2$ și $g(\theta) = \cos(n\theta - \varphi)$. Rezultă pentru f ecuația $f'' + \frac{1}{r}f' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)f = 0$ adică o ecuație Bessel de parametru n. Presupunînd funcția definită pe axa de simetrie se obține $f(r) = \lambda J_n(kr)$.

În rezumat funcțiile $e^{kz}\cos(n\theta - \varphi)J_1(kr)$. ($n$ întreg k și φ constante) sînt funcții armonice definite în tot spațiul.

CAPITOLUL XVI

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

1120. Avem $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ și $\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{dz}{x + y}$,

de unde

$$y = C_1 x \text{ și } x + y - z = C_2.$$

1121. Se deduc ecuațiile $\frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z}$; $y' = \frac{y - x}{y + x}$ ale căror soluții sînt $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 z^2$ și $\sqrt{x^2 + y^2} = C_2 e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

1122. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}=\dfrac{dx+dy+dz}{0}=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{0}$

de unde rezultă ecuaţiile

$$dx+dy+dz=0\,;\ xdx+ydy+zdz=0,$$

deci

$$x+y+z=C_1.$$

Curbele integrale sînt cercuri $x^2+y^2+z^2=C_2$.

1123. $\dfrac{dx}{x(y-z)}=\dfrac{dy}{y(z-x)}=\dfrac{dz}{z(x-y)}=\dfrac{dx+dy+dz}{0}=\dfrac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{0}$

de unde

$$dx+dy+dz=0 \text{ şi } \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0.$$

Rezultă

$$x+y+z=C_1,\ xyz=C_2.$$

1124. $\dfrac{dx}{bz-cy}=\dfrac{dy}{cx-az}=\dfrac{dz}{ay-bx}=\dfrac{adx+bdy+cdz}{0}=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{0}$,

de unde se deduc ecuaţiile

$$adx+bdy+cdz=0\,;\ xdx+ydy+zdz=0,$$

deci

$$ax+by+cz=C_1,\ x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Curbele integrale sînt cercuri.

1125. Se obţin combinaţiile integrabile:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{cz-by}=\frac{\frac{dy}{y}}{ay-cz}=\frac{\frac{dz}{z}}{by-ax}=\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{0},\ xyz=C_1$$

$$\frac{adx}{x(acz-aby)}=\frac{bdy}{y(abx-bcz)}=\frac{cdz}{z(bcy-acz)}=\frac{adx+bdy+cdz}{0}$$

$$ax+by+cz=C_2.$$

1126. $\dfrac{dz}{z^2}=\dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}+C_1$

din primele două rapoarte rezultă $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$, o ecuaţie omogenă, rezultă

$$\sqrt{x^2+y^2}\ e^{\operatorname{arctg}\frac{z}{x}}=C_2.$$

1127. Rezultă $dx+dy+dz=0$; deci $x+y+z=C_1$, se amplifică respectiv fiecare raport prin $2xz$; $-2yz$; $-(x^2+y^2)$ şi se face suma numărătorilor pe suma numitorilor etc. se obţine $2xz\,dx+2yz\,dy-(x^2+y^2)dz=0$ sau $\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\dfrac{dz}{z}$; $x^2+y^2=C_2z$.

Scanned with OKEN Scanner

1128. Sistemul conduce în primul rînd la o ecuație diferențială în x și y; $x\,dy - y\,dx = \alpha(x\,dx + y\,dy)$ sau $\rho = C_1 e^{\frac{\theta}{\alpha}}$ în coordonate polare. Sistemul se mai poate scrie

$$\frac{x\,dx}{x^2 - \alpha xy} = \frac{y\,dy}{y^2 + \alpha xy} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z}$$

deci $z = C_2\sqrt{x^2 + y^2}$.

1129. Avem $\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = -dz$;

de unde

$$x^2 + y^2 = C_1 e^{-2z}\,\frac{y\,dx - x\,dy}{2z(x^2 + y^2)} = dz$$

sau

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} + 2z\,dz = 0$$

așadar

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + z^2 = C_2.$$

Se deduce

$$x = \sqrt{C_1}e^{-z}\cos(C_2 - z^2);\ y = \sqrt{C_1}e^{-z}\sin(C_2 - z^2).$$

1130. Din primele două rapoarte rezultă $x^2 + y^2 = c_1$. Avem $\frac{dx + dy}{(x + y)(y - x)} = \frac{dz}{(x - y)(2x + 2y + z)}$. Notînd $x + y = u$ și simplificînd cu $x - y$, se obține ecuația diferențială liniară $z' + \frac{1}{u}z + 2 = 0$, a cărei soluție este $z(x + y) + (x + y)^2 = C_2$. Deci ecuațiile curbelor integrale sînt $x^2 + y^2 = C_1$ și $(x + y)(x + y + z) = C_2$.

1131. Din primele rapoarte se obține $y = C_1 x$, iar a doua combinație integrabilă este $\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dx}{2x}$, a cărei soluție este $x^2 + y^2 + z^2 = C_2 x$. Curbele integrale sînt cercuri.

1132. Avem $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ și $\frac{y\,dx + x\,dy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$

de unde

$$y^2 - x^2 = C_1;\ z = C_2 xy.$$

1133. Avem $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ și $y' = \frac{3y^2}{x^3 + 3xy^2}$ adică o ecuație omogenă. Se obține

$$z = C_1 y,\ y^3 + x^2 y = C_2 x^2.$$

1134. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$; $yz = C_2 x$.

1135. $x^2 + y^2 + \ln z^2 = C_1$; $z(xy - 1) = C_2$.

1136. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$; $xyz = C_2$.

Scanned with OKEN Scanner

1137. Avem $\dfrac{dx-dy}{x^2-yz-y^2+xz}=\dfrac{dy-dz}{y^2-xz-z^2+xy}$

sau

$$\frac{dx-dy}{(x-y)(x+y+z)}=\frac{dy-dz}{(y-z)(x+y+z)},\quad \frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z},$$

deci

$$y-z=C_1(x-y).$$

Pentru a doua combinație integrabilă

$$\frac{xdx}{x^3-xyz}=\frac{ydy}{y^3-xyz}=\frac{zdz}{z^3-xyz}=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}=\frac{dx+dy+dz}{z^2+y+z^2-xy-yz-x}$$

Cum $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, din egalitatea ultimilor fracții rezultă ecuația $xdx+ydy+zdz=(x+y+z)(dx+dy+dz)$,

care dă

$$x^2+y^2+z^2+2C_2=(x+y+z)^2$$

sau

$$xy+yz+zx=C_2.$$

Soluția sistemului este așadar

$$y-z=C_1(x-y);$$
$$xy+yz+zx=C_2.$$

1138. Derivînd prima ecuație, rezultă $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=0$;

din ecuația a doua se deduce $\dfrac{dy}{dt}=3y-4x$ și din prima $y=\dfrac{dx}{dt}+2x$.

Așadar se obține $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=0$.

Rezultă $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$ și $y=4C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$.

1139. Derivînd ecuația a doua și înlocuind pe x' și x din sistemul dat. rezultă $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$.

Soluția este

$$y=e^{-2t}(C_1+C_2t);\ x=e^{-2t}(C_1+C_2-C_2t);$$

pentru $t=0$ se obține

$$C_1=1,\ C_2=2.$$

1140. Eliminînd y și z, se obține $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=0$, ecuație liniară a cărei soluție este

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}.$$

Avem $\dfrac{dy}{dt}=x+\dfrac{dx}{dt}-y$

sau

$$\frac{dy}{dt}+y=3C_2e^{2t},$$

Scanned with OKEN Scanner

a cărei soluție este

$$y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t},$$

iar

$$z = \frac{dx}{dt} - y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t},$$

iar

$$z = \frac{dx}{dt} - y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Deci

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t};\ y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t};\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

1141. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x - y$

sau

$$\frac{d}{dt}(x - y) = x - y,$$

de unde

$$x - y = Ce^t,$$

iar

$$\frac{dz}{dt} + z = 3(x - y),$$

deci

$$\frac{dz}{dt} + z = 3Ce^t,\ z = be^{-t} + \frac{3}{2}ce^t\ \frac{dx}{dt} - 3x = y - x - z,$$

din care rezultă

$$x = ae^{+3t} + \frac{5}{4}ce^t + \frac{b}{4}e^{-t}.$$

Soluțiile sistemului sînt

$$x = ae^{3t} + \frac{5}{4}ce^t + \frac{b}{4}e^{-t};\ y = ae^{3t} + \frac{c}{4}e^t + \frac{b}{4}e^{-t};\ z = \frac{3}{2}ce^t + be^{-t}.$$

1142. Derivînd prima ecuație, se obține $x'' + x' - y' - z' = 0$, în care se înlocuiesc valorile lui y' și z'; scoase din ecuațiile (2) și (3) ale sistemului, rezultă

$$x'' + x' - 2x - 2z = 0. \qquad (2)$$

Se derivează ecuația (2) în raport cu t și se înlocuiește z' și avem

$$x''' + x'' - 2x' - 2x - 2y - 2z = 0. \qquad (3)$$

Se elimină y și z din prima ecuație a sistemului și ecuațiile (2) și (3) obținute. Adică

$$\begin{vmatrix} x' + x & -1 & -1 \\ x'' + x' - 2x & 0 & -1 \\ x''' + x'' - 2x' - 2x & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

sau $x''' + x'' - 4x' - 4x = 0$. Ecuație cu coeficienți constanți a cărei ecuație caracteristică $r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$; $r_2 = 2$; $r_3 = -2$.

Deci

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația (2) avem

$$2z = x'' + x' - 2x = 2C_1e^{-t} + 4C_2e^{2t},$$

iar

$$z = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t},\ y = x' + x - z = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}.$$

1143. Derivînd prima ecuație, avem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dy}{dx} - 6\frac{dx}{dt} = -96\sin t.$$

Adunînd această ecuație cu cele două din sistem multiplicate cu 2 și -16, se obține

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = -64\sin 2t; \tag{1}$$

$$x = (C_1 + C_2t)e^{2t} - 8\cos 2t.$$

Înlocuind x și $\frac{dx}{dt}$ în prima ecuație, se obține

$$y = \frac{1}{16}(4C_1 - C_2 + 4C_2t)e^{2t} - \sin 2t. \tag{2}$$

(1) și (2) dau integrala generală cerută.

1144. Se derivează prima ecuație și se elimină y și $\frac{dy}{dt}$, obținîndu-se ecuația rezolvantă

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 4\cos t - 2\sin t;$$

$$x = e^{-t}(A\cos 2t - B\sin 2t) + \cos t;$$

$$y = e^{-t}(A\sin 2t + B\cos 2t) + \frac{1}{2}e^{-t} + \sin t.$$

Integralele particulare cerute sînt:

$$x = \cos t(1 + e^{-t}\sin t);$$

$$y = \sin t(1 + e^{-t}\sin t).$$

1145. $x = C_1 + C_2e^{\frac{1}{2}t} - t^2 - 4t + \frac{\sin 2t + \cos 2t}{34}$

$$y = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}t^2 - t + 2 + \frac{2\cos 2t + 9\sin 2t}{68}.$$

1146. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + 7C_3\cos 3t + 7C_2\sin 3t + \frac{14}{9}t;$

$$y = -C_1e^t - C_2e^{-t} + 3C_3\cos 3t + 3C_4\sin 3t - \frac{4t}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1147. $x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{-3t} - \frac{2}{325}\cos 2t - \frac{36}{225}\sin 2t + 2t + 4$

$y = [2C_1 + C_2(2t - 1)]e^t + \frac{20}{3}C_2 e^{-3t} + \frac{16}{325}\cos 2t - \frac{37}{325}\sin 2t + 6t + 10.$

1148. Se procedează ca la sistemul **1138.** Eliminînd pe x și y, se obține ecuația rezolvată

$$\frac{d^3z}{dt^3} + \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = -e^t - \cos t.$$

Rezultă

$$z = C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t - \frac{1}{4}e^t + \frac{t}{4}(\cos t - \sin t);$$

$$x = -\frac{dz}{dt}; \quad y = x + \frac{dx}{dt} - e^t \text{ etc.}$$

1149. După teoria generală a sistemelor liniare cu coeficienți constanți se caută o soluție particulară de forma $x = \alpha e^{rt}$; $y = \beta e^{rt}$, α, β, r fiind constante. Înlocuind în sistem, se obține sistemul omogen

$$(r + 4)\alpha + 3\beta = 0;$$
$$2\alpha + (r + 5)\beta = 0,$$

care au soluții nenule pentru α și β dacă

$$\begin{vmatrix} r+4 & 3 \\ 2 & r+5 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } r^2 + 9r + 14 = 0$$

$$r_1 = -2, \; r_2 = -7.$$

Pentru

$$r_1 = -2 \quad \alpha_1 = 3, \quad \beta_1 = -2;$$
$$r_2 = -7 \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1,$$

deci

$$x = 3C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-7t}; \; y = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-7t}.$$

1150. Procedînd ca la exercițiul anterior, se obține

$$(4r + 44)\alpha + (9r + 49)\beta = 0;$$
$$(3r + 34)\alpha + (7r + 38)\beta = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 4r+44 & 9r+49 \\ 3r+34 & 7r+38 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } r^2 + 7r + 6 = 0$$

$$r_1 = -1, \; r_2 = -6.$$

Pentru

$$r_1 = -1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -1$$
$$r_2 = -6, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = +4$$

Deci

$$y = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{-6x}; \; z = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{-6x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1151. Se consideră sistemul omogen, pentru care se caută soluții de forma $x = \alpha e^{rt}$, $y = \beta e^{rt}$, care înlocuite ne conduc la sistemul

$$(r+5)\alpha - 2\beta = 0;$$
$$-\alpha + (r+6)\beta = 6,$$

care admite soluții nenule pentru α și β dacă $r^2 + 11r + 28 = 0$, adică

$$r_1 = -4,\ r_2 = -7;$$

rezultă

$$x = 2C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t};\ y = C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t}.$$

Pentru obținerea integralei generale se folosește metoda variației constantelor; rezultă sistemul

$$2C_1'e^{-4t} + C_2'e^{-7t} = e^t;$$
$$C_1'e^{-4t} - C_2'e^{-7t} = e^{-2t},$$

deci

$$3C_1' = e^{5t} + e^{2t},\ 3C_2' = e^{8t} - 2e^{5t}.$$

Rezultă

$$C_1(t) = \frac{e^{5t}}{15} + \frac{e^{2t}}{6} + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{e^{8t}}{24} - \frac{2e^{5t}}{15} + C_2.$$

Așadar

$$x = 2\left(C_1 + \frac{e^{5t}}{15} + \frac{e^{2t}}{6}\right)e^{-4t} + \left(C_2 + \frac{e^{8t}}{24} - \frac{2e^{5t}}{15}\right)e^{-7t};$$

$$y = \left(C_1 + \frac{e^{5t}}{15} + \frac{e^{2t}}{6}\right)e^{-4t} - \left(C_2 + \frac{e^{8t}}{24} - \frac{2e^{5t}}{15}\right)e^{-7t}.$$

$$x = 2C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t};$$

$$y = C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{3}{10}e^{-2t}.$$

1152. Sistemul omogen este de tip Euler, deci se caută soluții particulare de forma $y = \alpha x^r$; $z = \beta x^r$. Substituind în sistemul omogen, rezultă $(r+1)\alpha + 2\beta = 0$; $-3\alpha + (r-4)\beta = 0$, sistemul care are soluții nenule pentru α și β dacă $r_1 = 1$ sau $r_2 = 2$. Se obține $y = c_1x + c_2 2x^2$; $x = -c_1x - c_2 3x^2$.

Pentru obținerea integralei generale a sistemului dat se folosește metoda variației constantelor

$$x^2c_1'(x) + 2x^3c_2'(x) = x^4\cos x;\ -x^2c_1'(x) - 3x^2c_2'(x) = 0;$$

$$C_1(x) = 3\int x^2\cos x\,dx + c_1;\ C_2(x) = -\int x\cos x\,dx + c_2;$$

$$C_1(x) = (3x^2 - 6)\sin x + 6x\cos x + c_1;\ C_2(x) = -\cos x - x\sin x + c_2.$$

Rezultă

$$y = c_1x + c_2 \cdot 2x^2 + (x^3 - 6x)\sin x + 4x^2\cos x;$$
$$z = -c_1x - c_2 \cdot 3x^2 + 6x\sin x - 3x^2\cos x.$$

Scanned with OKEN Scanner

1153. Se caută soluții de forma $x = \alpha e^{rt}$; $y = \beta e^{rt}$; $z = \gamma e^{rt}$. Substituind, se obține

$$(r+1)\alpha + \beta + 2\gamma = 0;$$
$$\alpha + (r+1)\beta - \gamma = 0;$$
$$2\alpha + \beta + (r+1)\gamma = 0,$$

care sistem omogen are soluții nenule pentru α, β, γ dacă

$$\begin{vmatrix} r+1 & 1 & 2 \\ 1 & r+1 & -1 \\ 2 & 1 & r+1 \end{vmatrix} = 0$$

Rădăcinile sînt $r_1 = 1$; $r_2 = -1$; $r_3 = -3$.

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ r+1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{-\begin{vmatrix} r+1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma}{\begin{vmatrix} r+1 & 1 \\ 1 & r+1 \end{vmatrix}}$$

Se poate lua $\alpha = -2r - 3$; $\beta = r + 3$; $\gamma = r^2 + 2r$. Avem

$$r_1 = 1 \quad \alpha_1 = -5 \quad \beta_1 = 4 \quad \gamma_1 = 3$$
$$r_2 = -1 \quad \alpha_2 = -1 \quad \beta_2 = 2 \quad \gamma_2 = -1$$
$$r_3 = -3 \quad \alpha_3 = 1 \quad \beta_3 = 0 \quad \gamma_3 = 1$$

deci

$$x = -5C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3e^{-3t};$$
$$y = 4C_1e^t + 2C_2e^{-t};$$
$$z = 3C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3e^{-3t}.$$

1154. Același procedeu ca în exemplul anterior și se obține

$$\begin{matrix} r\alpha - \beta = 0 \\ r\beta - \gamma = 0, \\ r\gamma - \alpha = 0 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} r-1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -1 \\ -1 & 0 & r \end{vmatrix} = r^3 - 1 = 0$$

$$r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},\ r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Se pot lua pentru α, β, γ valorile

$$\alpha = \begin{vmatrix} r & -1 \\ 0 & r \end{vmatrix} = r^2;\ \beta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ r & -1 \end{vmatrix} = 1;\ \gamma = \begin{vmatrix} 0 & r \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = r.$$

Cele 3 soluții distincte sînt

$$x_1 = e^t,\ y_1 = e^t,\ z_1 = e^t;$$

$$x_2 = e^{-\frac{1}{2}t}e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)};\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}t}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$z_2 = e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)},$$

$$x_3 = e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)};\quad y_3 = e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t},$$

$$z_3 = e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}.$$

Se iau în locul soluțiilor imaginare

$$X_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3),\ Y_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3),\ Z_2 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$$

$$X_3 = \frac{1}{2i}(x_2 - x_3);\quad Y_2 = \frac{1}{2i}(y_2 - y_3);\quad Z_3 = \frac{1}{2i}(z_2 - z_3)$$

deci

$$X_2 = e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);\quad Y_2 = e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t;$$

$$Z_2 = -e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);$$

$$X_3 = -e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);\quad Y_3 = e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t;$$

$$Z_3 = -e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Integrala generală este

$$x = C_1e^t - e^{-\frac{t}{2}}\left[C_2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_3\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right];$$

$$y = C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);$$

$$z = C_1e^t - e^{-\frac{t}{2}}\left[C_2\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_3\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right].$$

Se verifică prin derivare că $y = \frac{dx}{dt}$; $z = \frac{dy}{dt}$,

deci

$$\frac{d^3y}{dt^3} - y = 0;$$

ecuația caracteristică este $r^3 - 1 = 0$ cu rădăcinile de mai sus

$$y = C_1e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

iar x și z se deduc:

$$z = \frac{dy}{dt};\quad x = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1155. $x = \alpha e^{rt}$; $y = \beta e^{rt}$; $z = \gamma e^{rt}$.
Se determină r din sistemul

$$(2r + 3)\alpha - 4\beta + \gamma = 0;$$
$$\alpha + r\beta - \gamma = 0;$$
$$-3\alpha + 12\beta + (2r - 9)\gamma = 0$$

obținut prin substituirea în sistemul dat a soluțiilor particulare. Determinantul sistemului $4r(r^2 - 3r + 2)$ se anulează pentru $r_1 = 0$; $r_2 = 1$; $r_3 = 2$. La fiecare valoare a lui r corespund pentru α, β, γ numerele proporționale scoase din matricea

$$\begin{bmatrix} 2r+3 & -4 & 1 \\ 1 & r & -1 \end{bmatrix}$$

pentru $r_1 = 0$ $\quad \alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 1 \quad \gamma_1 = 1$;
pentru $r_2 = 1$ $\quad \alpha_2 = 1 \quad \beta_2 = 2 \quad \gamma_2 = 3$;
pentru $r_3 = 2$ $\quad \alpha_3 = 1 \quad \beta_3 = 4 \quad \gamma_3 = 9$

și integrala sistemului este

$$x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t};$$
$$y = C_1 + 2C_2 e^t + 4C_3 e^{3t};$$
$$z = C_1 + 3C_2 e^t + 9C_3 e^{3t}.$$

1156. Pentru sistemul omogen se caută soluții de forma $x = \alpha e^{rt}$; $y = \beta e^{rt}$; $z = \gamma e^{rt}$
și se deduce:

$$\begin{matrix} (r-4)\alpha + 18\beta - 9\gamma = 0 \\ \alpha + (r-5)\beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha - 14\beta + (r+6)\gamma = 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} r-4 & 18 & -9 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & -14 & r+6 \end{matrix} \right| = (r-1)^3 = 0$$

Se iau pentru α, β, γ minorii determinantului corespunzător elementelor primei linii

$$\alpha = \begin{vmatrix} r-5 & 2 \\ -14 & r+6 \end{vmatrix} = r^2 + r - 2; \quad \beta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ r+6 & 3 \end{vmatrix} = -r;$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} 1 & r-5 \\ 3 & -14 \end{vmatrix} = -3r + 1$$

Cele trei soluții distincte se obțin înlocuind pe r cu 1 în

$$\alpha e^{rt} = (r^2 + r - 2)e^{rt}; \quad \beta e^{rt} = -re^{rt};$$

$$\gamma e^{rt} = (-3r + 1)e^{rt}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \alpha e^{rt} = [(2r + 1) + t(r^2 + r - 2)]e^{rt};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \beta e^{rt} = (-1 - rt)e^{rt}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \gamma e^{rt} = [-3 + t(-3r + 1)]e^{rt};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}\alpha e^{rt} = [2 + 2t(2r + 1) + t^2(r^2 + r - 2)]e^{rt};$$

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}\beta e^{rt} = (-2t - rt^2)e^{rt};$$

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}\gamma e^{rt} = [-6t + t^2(-3r + 1)]e^{rt}.$$

În consecință, cele 3 soluții sînt

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = -e^{rt} \qquad z_1 = -2e^t;$$
$$x_2 = 3e^t \qquad y_2 = (-1 - t)e^t \qquad z_2 = (-3 - 2t)e^t;$$
$$x_3 = (2 + 6t)e^t \qquad y_3 = (-2t - t^2)e^t \qquad z_3 = (-6t - 2t^2)e^t;$$

iar integrala generală a sistemului omogen este

$$x = [3C_2 + C_3(2 + 6t)]e^t;$$
$$y = -[C_1 + C_2(1 + t) + C_3(2t + t^2)]e^t;$$
$$z = -[2C_1 + C_2(3 + 2t) + C_3(6t + 2t^2)]e^t.$$

Folosind metoda variației constantelor, se deduc integralele particulare $X = -1$; $Y = x$; $Z = x^2$, care se adaugă la soluția sistemului omogen, pentru a avea integrala generală a sistemului neomogen.

1157. Adunînd cele 3 ecuații, avem :

$$x + y + z = \sqrt{3}\sin t.$$

Scăzînd ultimele două ecuații

$$y' + z' = 2x' + (z - y)\sqrt{3} = \sqrt{3}\cos t - x';$$
$$x'\sqrt{3} + z - y = \cos t;$$
$$x''\sqrt{3} = y' - z' - \sin t = -x\sqrt{3}.$$

Ecuația $x'' + x = 0$ dă

$x = a\cos t + b\sin t$, iar y și z sînt date de

$$y - z = x'\sqrt{3} - \cos t;$$
$$y + z = \sqrt{3}\sin t - x.$$

1158. Adunînd ecuațiile, se obține

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + y + z) = x + y + z,$$

de unde

$$x + y + z = C_1e^t + C_2e^{-t};$$
$$y + z = C_1e^t + C_2e^{-t} - x,$$

valoare care dusă în prima dă

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = C_1e^t + C_2e^{-t} \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

1159. Sistemul se scrie

$$\begin{aligned} tx' - z &= 0; \\ ty' - x &= 0; \\ tz' + 6y - 7z &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Se derivează ultima ecuație de două ori și se obține

$$tz'' + z' + 6y' - 7x' = 0,$$

în care înlocuind x', y', z' prin valorile din (1) rezultă

$$t^2z'' + 13x - 6y - 7z = 0 \tag{2}$$

și apoi

$$t^2z''' + 2tz'' + 13x' - 6y' - 7z' = 0,$$

în care înlocuind z'', x', y' și z' scoase din ecuațiile precedente, avem

$$t^3z''' - 81x + 54y + 27z = 0. \tag{3}$$

Eliminînd x, y între a treia ecuație (1), (2) și (3), se obține ecuația rezolvantă

$$t^3z''' + 3t^2z'' - 6tz + 6 = 0 \tag{4}$$

a cărei ecuație caracteristică este $r^3 - 7r + 6 = 0$.

$$z = At + Bt^2 + \frac{C}{t^3} \tag{5}$$

$$x = At + \frac{B}{2}t^2 - \frac{C}{3t^3}$$

$$y = At + \frac{B}{4}t^2 + \frac{C}{9t^3} \tag{6}$$

Rezolvînd ecuațiile (5) și (6) în raport cu A, B și C apar integralele prime

$$\frac{x - 6y + z}{t} = 4A; \quad \frac{2x - 3y + z}{t^2} = \frac{5}{4}B;$$

$$t^3(3x - 2y - z) = -\frac{20}{9}C.$$

Problema ce se pune este de a forma, utilizînd rapoartele (1), combinațiile integrabile corespunzătoare.

Căutăm dacă este posibil ca amplificînd cele trei raporte prin constantele α, β, și γ, ecuația

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha z + \beta x + \gamma(7x - 6y)} = \frac{dt}{t}$$

să fie o combinație integrabilă.

Aceasta va fi posibil cînd numitorul $\alpha z + \beta x + \gamma(7x - 6y)$ va fi de forma $S(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, de unde rezultă

$$\begin{cases} \beta + 7\gamma - S\alpha = 0 \\ -6\gamma - S\beta = 0 \\ \alpha - S\gamma = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

S este o soluție a ecuației

$$\begin{vmatrix} -S & 1 & 7 \\ 0 & -S & -6 \\ 1 & 0 & S \end{vmatrix} = 0\,;\quad S^3 - 7S + 6 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt 1, 2, —3. $S = 1$, ecuațiile (7) dau

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{-6} = \frac{\gamma}{1},$$

de unde

$$\frac{dx - 6dy + dz}{x - 6y + z} = \frac{dt}{t},$$

care conduce la integrala primă

$$x - 6y + z = ct \text{ etc.}$$

Observație: Ecuația în S este identică cu ecuația caracteristică a rezolvantei în z.

1160. Ecuațiile diferențiale ale liniilor de cîmp ale cîmpului vectorial

$$\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

sînt

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

În cazul nostru avem

$$\frac{dx}{ax + yz} = \frac{dy}{ay + xz} = \frac{dz}{az + xy}. \tag{1}$$

Pentru integrare formăm combinații integrabile

$$\frac{xdx}{ax^2 + xyz} = \frac{ydy}{ay^2 + xyz} = \frac{zdz}{az^2 + xyz}, \tag{2}$$

sau

$$\frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} = \frac{ydy - zdz}{y^2 - z^2},$$

deci

$$x^2 - y^2 = C_1(y^2 - z^2). \tag{3}$$

Se amplifică ultimul raport din (2) cu 2 și se obține

$$\frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} = \frac{xdx + ydy - 2zdz}{x^2 + y^2 - 2z^2}$$

de unde

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = C_2(x^2 - y^2)\,; \tag{4}$$

(3) și (4) reprezintă liniile de cîmp.

1161. $$\frac{dx}{x\dfrac{a^2 + z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}} = \frac{dy}{y\dfrac{a^2 + z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}} = \frac{dz}{\dfrac{-2z}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\frac{(x^2+y^2)x\,dx}{x^2(x^2+y^2-z^2-a^2)}=\frac{(x^2+y^2)y\,dy}{y^2(x^2+y^2-z^2-a^2)}=\frac{z\,dz}{2z^2}$$

sau

$$\frac{(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-z^2-a^2)}=\frac{z\,dz}{2z^2}=\frac{dz}{2z};$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\frac{dz}{2z};\quad z=C_2(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

şi $y=C_1x$, care rezultă din primele două rapoarte.

1162. Avem combinaţiile $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{z\,dz}{1+z^2}$ şi $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{dz}{1+z^2}$. Rezultă

$$x^2+y^2=C_1(1+z^2) \tag{1}$$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg}z=\operatorname{arctg}C_2$. Ecuaţia ultimă poate fi pusă sub forma

$$z=\frac{y-C_2x}{x+C_2y}. \tag{2}$$

Deci (1) şi (2) sînt ecuaţiile liniilor de cîmp.

1163. $z\neq 0$. Se obţine

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{4xy(x^2-y^2)}=-\frac{z\,dz}{xy(x^2-y^2)},$$

deci

$$x^2+y^2+4z^2=C_1.$$

A doua suprafaţă este dată de ecuaţia omogenă

$$\frac{dx}{3x^2y-y^3}=\frac{dy}{x^3-3xy^2},$$

adică

$$x^4-6x^2y^2+y^4=C_2$$

Observaţie.

$$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$$

este o diferenţială totală exactă.

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

METODA MATRICIALĂ

1164. Sistemul poate fi scris matricial 1) $\frac{dX}{dt}=AX$, unde $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ şi $A=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 12 & 10\end{bmatrix}$ se face schimbarea $X=PY$. P fiind matricea de trecere formată din vectorii proprii ai matricei A.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\frac{d}{dt}(PY) = APY \text{ sau } P\frac{dY}{dt} = APY, \ (2);$$

înmulțind în stînga în ambii membrii ai egalității 2) cu p^{-1} rezultă: $P^{-1}P\frac{dY}{dt} = (P^{-1}AP)Y$ dar $P^{-1}AP = D$, D fiind matricea diagonală iar $P^{-1}P = I$, I fiind matricea unitate, așadar se obține

$$3) \ \frac{dY}{dt} = DY \text{ și } 4) \ X = PY \text{ unde } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a matricei A: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ valorile proprii fiind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Vectorii proprii corespunzători sînt $v_1 = (3, -4)$ $v_2 = (2, -3)$. Matricea de trecere este $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ și matricea diagonală $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, așadar, 3) devine:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ sau } \frac{dy_1}{dt} = y_1; \frac{dy_2}{dt} = y_2$$

Așadar

$$y_1 = C_1e^t; \ y_2 = C_2e^{2t}.$$

din 4) rezultă

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \end{bmatrix} \text{ de unde } \begin{matrix} x = 3C_1e^t + 2C_2e^{2t} \\ y = -4C_1e^t - 3C_2e^{2t} \end{matrix}$$

1165. Sistemul se scrie matricial $\frac{dX}{dt} = AX$ (1) unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ecuația caracteristică este $\Delta(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0,$

cu valorile proprii

$$\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 2; \ \lambda_3 = -2.$$

Vectorii proprii corespunzători sînt

$$v_1 = (1, 1, 1); \ v_2 = (-1, 0, 1); \ v_3 = (-1, 2, 1),$$

unde $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ este matricea de trecere și $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

matricea diagonală. Făcînd schimbarea $X = PY$, unde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, ecuația 1)

Scanned with OKEN Scanner

devine ecuaţia 2). $\frac{dY}{dt} = DY$, din 2) rezultă :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1;\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_2;\ \frac{dy_3}{dt} = -2y_3,$$

aşadar

$$y_1 = C_1e^t;\ y_2 = C_2e^{2t};\ y_3 = C_3e^{-2t},$$

ţinînd seama de $X = PY$
se obţine :

$$x = C_1e^t - C_2e^{2t} + C_3e^{-2t};\ y = C_1e^t - 2C_3e^{-2t};\ z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}.$$

1166. Matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ecuaţia sa caracteristică $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2(2 - \lambda) = 0$ admite rădăcina dublă $\lambda = -1$ şi rădăcina simplă $\lambda = 2$. Pentru $\lambda = -1$, vectorii proprii corespunzători generează planul $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, vom alege ca generatori ai planului vectorii $v_1 = (1, -1, 0)$ şi $v_2 = (1, 0, -1)$. Pentru $\lambda = 2$ se obţine vectorul propriu $v_3 = (1, 1, 1)$, care împreună cu precedenţii completează o bază. Matricea A este deci diagonalizabilă.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ fiind matricea de trecere şi $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

fiind matricea diagonală. Schimbarea $X = PY$ unde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ conduce

la ecuaţia $\frac{dY}{dt} = DY$, din care rezultă

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1;\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2;\ \frac{dy_3}{dt} = 2y_3 \text{ etc.},$$

se obţine

$$x = (C_1 + C_2)e^{-t} + C_3e^{2t};\ y = -C_1e^{-t} + C_3e^{2t};\ z = -C_2e^{-t} + C_3e^{2t}.$$

1167. Sistemul se scrie matricial sub forma

1) $\frac{d^2X}{dt^2} = AX$, unde $A = \begin{bmatrix} -23 & -18 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, se face schimbarea

2) $X = PY$ unde P este matricea de trecere şi $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$: 1) devine $\frac{d^2}{dt^2}(PY) = APY$ sau $P\frac{d^2Y}{dt^2} = APY$ înmulţind în stînga cu P^{-1} rezultă $(P^{-1}P)\frac{d^2Y}{dt^2} = (P^{-1}AP)Y$ dar $P^{-1}P = I$ şi $D = P^{-1}AP$ aşadar $I\frac{d^2Y}{dt^2} = DY$ sau 3) $\frac{d^2Y}{dt^2} = DY$; I fiind matricea unitate. Ecuaţia caracteristică este $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, vectorii proprii corespunzători sînt $v_1 = (3, -4)$; $v_2 = (2, -3)$. Matricea de trecere este

Scanned with OKEN Scanner

$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ și matricea diagonală $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 3) devine

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2y_1}{dt^2} \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} \frac{d^2y_1}{dt^2} \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix}.$$

Așadar

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} - 4y_2 = 0,$$

care integrate ne conduc la

$$y_1 = \lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t\,; \quad y_2 = \lambda' \operatorname{ch} 2t + \mu' \operatorname{sh} 2t$$

din 2) rezultă:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t \\ \lambda' \operatorname{ch} 2t + \mu' \operatorname{sh} 2t \end{bmatrix}$$

așadar

$$y = 3(\lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t) + 2(\lambda' \operatorname{ch} 2t + \mu' \operatorname{sh} 2t)$$

$$y = -4(\lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t) - 3(\lambda' \operatorname{ch} 2t + \mu' \operatorname{sh} 2t).$$

1168. Procedeu analog ca mai sus. Se obține:

$$x = 3(\lambda \cos t + \mu \sin t) + 2(\lambda' \cos 2t + \mu' \sin 2t)$$

$$y = -4(\lambda \cos t + \mu \sin t) - 3(\lambda' \cos 2t + \mu' \sin 2t)$$

1169. *Metoda I.* Se notează $\frac{dx}{dt} = v$ și $\frac{dy}{dt} = w$, atunci sistemul devine:

$$(S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ldots v \\ \frac{dy}{dt} = \ldots w \\ \frac{dv}{dt} = 2x + 3y \ldots \\ \frac{dw}{dt} = -x - 2y \ldots \end{cases}$$

care este un sistem de ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul întîi (S') poate fi scris:

$$\frac{dZ}{dt} = BZ \text{ unde}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ și } Z(t) = (x(t),\ y(t),\ v(t),\ w(t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală va fi de forma

$$Z(t) = \alpha_1 Z_1(t) + \alpha_2 Z_2(t) + \ldots + \alpha_4 Z_4(t)$$

unde $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$, $Z_4(t)$ formează un sistem fundamental de soluții, așadar

$$\det[Z_1(t),\ Z_2(t),\ Z_3(t),\ Z_4(t)] \neq 0\ \forall t \in \mathbf{R}$$

fie $\det[Z_1(t_0)] \neq 0$ pentru o valoare t_0. Valorile proprii ale matricei B sînt toate distincte

$$\lambda_1 = \mathrm{i};\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -\mathrm{i};\ \lambda_3 = 1;\ \lambda_4 = -1$$

Într-adevăr $\det[B - \lambda I] = \lambda^4 - 1 = 0$ are rădăcinile i, $-$i, 1 și -1; deci

$$e^{\lambda_1 t}V_1,\ e^{\lambda_2 t}V_2,\ e^{\lambda_3 t}V_3,\ e^{\lambda_4 t}V_4$$

[V_j fiind vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ_j], constituie un sistem fundamental de soluții. Calculul lui V_j. El este definit prin $(B - \lambda_j I)V_j = 0$, adică notînd $V_j = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avem:

$$-\lambda_j x_1 + x_3 = 0;\ -\lambda_j x_2 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - \lambda_j x_3 = 0;\ -x_1 - 2x_2 - \lambda_j x_4 = 0$$

luînd $x_2 = -1$ se obține:

$V_1 = (1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})$ (se face $\lambda_j = \mathrm{i}$); $V_2 = \bar{V}_1 = (1, -1, -\mathrm{i}, \mathrm{i})$

$V_3 = (3, -1, 3, -1)$ și $V_4 = (3, -1, -3, 1)$

În rezumat: $X_1(t) = e^{it}V_1$, $X_2(t) = e^{-it}V_2$, $X_3(t) = e^{t}V_3$, $X_4(t) = e^{-t}V_4$ constituie un sistem fundamental de soluții. B fiind real îi putem substitui sistemul fundamental $(Y_1(t), Y_2(t), X_3(t), X_4(t)$ unde $Y_1(t) = \mathrm{Re}X_1(t)$, $Y_2(t) = \mathrm{Im}X_1(t)$.

Re partea reală, Im partea imaginară *calculul lui* $Y_1(t)$ *și* $Y_2(t)$. Avem $X_1(t) = Y_1(t) + \mathrm{i}Y_2(t) = e^{it}V_1 = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)(W_1 + \mathrm{i}W_2)$ de unde $W_1 = (1, -1, 0, 0)$; $W_2 = (0, 0, 1, -1)$ pentru că $V_1 = W_1 + \mathrm{i}W_2$ deci

$$Y_1(t) = \cos tW_1 - \sin tW_2$$

$$Y_2(t) = \cos tW_2 + \sin tW_1$$

Soluția generală în domeniul real. Avem:

$$Z(t) = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) + \alpha_3 X_3(t) + \alpha_4 X_4(t)$$

α_j constante reale, sau

$x(t),\ y(t),\ v(t),\ w(t) = \alpha_1 \cos t\,(1, -1, 0, 0) - \alpha_1 \sin t\,(0, 0, 1, -1) + \alpha_2 \cos t(0, 0, 1, -1) + \alpha_2 \sin t(1, -1, 0, 0) + \alpha_3 e^{t}(3, -1, 3, -1) + \alpha_4 e^{-t}(3, -1, -3, 1)$ se deduce:

$$x(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + 3\alpha_3 e^{t} + 3\alpha_4 e^{-t}$$

$$y(t) = -\alpha_1 \cos t - \alpha_2 \sin t - \alpha_3 e^{t} - \alpha_4 e^{-t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda II. Se aplică metoda folosită în exercițiile precedente.
Metoda III. Se poate reduce la integrarea unor ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Într-adevăr:

$x'' = 2x + 3y \Rightarrow x^{(4)} = 2x'' + 3y''$ derivînd de două ori; dar

$$y'' = -x - 2y$$

deci

$$x^{(4)} = 2x'' - 3x - 6y$$

$$x'' = 2x + 3y$$

de unde $x^{(4)} - x = 0$ eliminînd pe y se deduce x:

$$x(t) = \mu_1 \cos t + \mu_2 \sin t + \mu_3 e^t + \mu_4 e^{-t}$$

apoi y, observînd că $y = \frac{1}{3}x'' - \frac{2}{3}x$.

1170. Fie

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Sistemul se scrie $X' = AX$

se poate diagonaliza matricea A sub forma:

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = PDP^{-1} \text{ sau } P^{-1}AP = D$$

unde $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; de unde $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dacă se notează $X = PU$ unde $U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ se obține

$$X' = AX \Leftrightarrow U' = DU \text{ rezultă}$$

$$u = \lambda e^{(1+i)t} : v = \mu e^{(1-i)t}; \; w = \nu e^t$$

$$x = \frac{u+v}{2} = e^t\left[\frac{\lambda+\mu}{2}\cos t + i\,\frac{\lambda-\mu}{2}\sin t\right]$$

$$y = i\,\frac{v-u}{2} = e^t\left[i\,\frac{\mu-\lambda}{2}\cos t + \frac{\mu+\lambda}{2}\sin t\right]$$

$$z = w = \nu e^t$$

se notează

$$\frac{\lambda+\mu}{2} = p\,; \frac{\lambda-\mu}{2i} = q\,; \; \nu = r$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\lambda = p + iq\,;\ \mu = p - iq \text{ sau încă } \lambda = \alpha \text{ și } \mu = \beta$$

rezultă

$$x = e^t(p\cos t - q\sin t)$$
$$y = e^t(q\cos t + p\sin t)$$
$$z = \nu e^t.$$

1171. Se notează:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se știe că dacă V este un vector propriu al matricei A relativ la valoarea proprie λ, vectorul $X = Ve^{\lambda t}$ este o soluție a sistemului propus, pentru că $\frac{dX}{dt} = \lambda Ve^{\lambda t} = AVe^{\lambda t} = AX$.

În cazul în care valorile proprii sînt distincte, soluția generală este o combinație liniară a soluțiilor precedente. Componentele x_1, x_2, x_3 ale unui vector propriu, relativ la valoarea proprie λ sînt soluțiile sistemului

$$x_1(1-\lambda) + x_2 = 0 \qquad x_1 = (\lambda - 1)x_3$$
$$-x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \qquad x_2 = (\lambda-1)^2 x_3$$
$$x_1 + \ldots + (1-\lambda)x_3 = 0 \qquad x_3[-(\lambda-1)+(2-\lambda)(\lambda-1)^2+1]=0.$$

Ecuația caracteristică este așadar:

$$(\lambda-1)^2(2-\lambda) + 2 - \lambda = (2-\lambda)[(\lambda-1)^2 + 1] = 0$$

valorile proprii sînt

$$\lambda_1 = 2\,;\ \lambda_2 = 1 + i\,;\ \lambda_3 = 1 - i.$$

Se obțin imediat componentele vectorilor proprii relative la fiecare din valorile proprii, pentru $\lambda_1 = 2$; $V_1 = (1, 1, 1)$; pentru $\lambda_2 = 1 + i$, $V_2 = (i, -1, 1)$ și pentru $\lambda_3 = 1 - i$, $V_3 = (-i, -1, 1)$.

Soluția generală a sistemului (1) este deci

$$X = aV_1e^{\lambda_1 t} + bV_2e^{\lambda_2 t} + cV_3e^{\lambda_3 t}$$

a, b, c fiind constante arbitrare, așadar

$$x = ae^{2t} + ie^t(be^{it} - ce^{-it})$$
$$y = ae^{2t} - e^t(be^{it} + ce^{-it})$$
$$z = ae^{2t} + e^t(be^{it} + ce^{-it})$$

Observație. Dacă se caută soluțiile reale ale sistemului, este necesar și suficient ca a să fie real și b și c numere complexe conjugate se poate da o expresie unde nu figurează decît termeni reali, notînd $b = \frac{\beta + i\gamma}{2}$; $c = \frac{\beta - i\gamma}{2i}$

$$x = ae^{2t} - e^t(\gamma\cos t + \beta\sin t)$$
$$y = ae^{2t} - e^t(\beta\cos t - \gamma\sin t)$$
$$z = ae^{2t} + e^t(\beta\cos t - \gamma\sin t).$$

Scanned with OKEN Scanner

1172. Pentru căutarea unei soluții particulare a sistemului cu partea a doua și determinarea soluției satisfăcînd unor condiții date va fi mai simplu de a utiliza baza formată din vectorii proprii V_1, V_2, V_3 ai matricei A, vom determina matricele de trecere P și P^{-1} (vezi 1165).

Dacă X și U sînt matricele coloane ale componentelor unui vector în baza canonică și în baza vectorilor proprii, se notează $X = PU$, $U = P^{-1}X$. Se știe că P este matricea ale cărei vectori coloane sînt vectorii proprii V_1, V_2, V_3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se poate determina P^{-1} rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} x = u + \mathrm{i}v - \mathrm{i}w \\ y = u - v - w \\ z = u + v + w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{y+z}{2} \\ v + w = \dfrac{z-y}{2} \\ v - w = -\mathrm{i}\dfrac{2x-y-z}{2} \end{cases}$$

$$U = P^{-1}X \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ v = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}x - \dfrac{1-\mathrm{i}}{4}y + \dfrac{1+\mathrm{i}}{4}z \\ w = \dfrac{\mathrm{i}}{2}x - \dfrac{1+\mathrm{i}}{4}y + \dfrac{1-\mathrm{i}}{4}z. \end{cases}$$

Sistemul (2′) transformatul lui (2) prin schimbarea de bază se obține mediat

$$\frac{dX}{dt} = AX + \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = P^{-1}APU + \mathrm{e}^{2t}P^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{du}{dt} = 2u + \mathrm{e}^{2t}$$

$$\frac{dv}{dt} = (1+\mathrm{i})v + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t}$$

$$\frac{dw}{dt} = (1-\mathrm{i})w - \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t}.$$

Trebuie determinată soluția acestui sistem în așa fel ca

$$U_0 = \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = P^{-1}X_0 = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\mathrm{i}}{2} \\ \dfrac{\mathrm{i}}{2} \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom determina pentru fiecare din cele trei ecuații ale sistemului soluția generală, apoi valorea constantei

$$\begin{cases} u = ae^{2t} + te^{2t} \\ v = be^{t(1+i)} - \dfrac{1-i}{2}e^{2t} \\ w = ce^{t(1-i)} - \dfrac{1+i}{2}e^{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ v(0) = -\dfrac{i}{2} \Rightarrow b = \dfrac{1}{2} - i \\ w(0) = \dfrac{i}{2} \Rightarrow c = \dfrac{1}{2} + i \end{cases}$$

Soluția sistemului 2) se obține atunci determinînd vectorul $X = PU$ se obține :

$$x = e^t(2\cos t - \sin t) + te^{2t} - e^{2t}$$
$$y = -e^t(\cos t + 2\sin t) + te^{2t} + e^{2t}$$
$$z = e^t(\cos t + 2\sin t) + te^{2t} - e^{2t}.$$

Se poate evita schimbarea bazei observînd că membrii doi ai sistemului sînt exponențiale de exponent $2t$ și 2 este valoare proprie simplă a matricei sistemului, se știe că în acest caz sistemul are o soluție particulară de forma :

$$x = (pt + p')e^{2t}\,;\ y = (qt + q')e^{2t}\,;\ z = (rt + r')e^{2t}$$

p, q, r, p', q', r' sînt constante necunoscute, scriind că x, y, z verifică sistemul 2) se obține :

$$\begin{aligned} 2p &= p + q & 2p' + p &= p' + q' + 1 \\ 2q &= -p + 2q + r & 2q' + q &= -p' + 2q' + r' + 1 \\ 2r &= p + r & 2r' + r &= p' + r' + 1 \end{aligned}$$

rezolvînd primele trei ecuații se obține $p = q = r$ apoi $p = 1$; $p' = r'$, $q' = p' + 2$. Soluția generală a sistemului (2) se obține adăugînd la soluția generală a sistemului (1) o soluție particulară a sistemului (2) de exemplu aceea obținută pentru $p' = 0$.

1173. 1) În problema nr. 41 am obținut

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

vom lua ca noi funcții necunoscute termenii u, v, w ai matricei U definită prin $X = TU \Leftrightarrow U = T^{-1}X$. Într-adevăr

$$\frac{dU}{dt} = T^{-1}\cdot\frac{dX}{dt} = T^{-1}ATU \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 2u \\ v' = 4v + w \\ w' = 4w \end{cases}$$

Soluția generală a sistemului transformat este :

$$u = ae^{2t}\,;\ v = (bt + c)e^{4t}\,;\ w = be^{4t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția sistemului (S) se deduce calculînd termenii matricei $X = TU$:

$$x = ae^{2t} + bte^{4t} + \left(\frac{b}{3} + c\right)e^{4t}$$

$$y = ae^{2t} - bte^{4t} + \left(\frac{b}{3} - c\right)e^{4t}$$

$$z = ae^{2t} + bte^{4t} + ce^{4t}$$

În particular, această soluție ia pentru $t = 0$ valorile x_0, y_0, z_0, dacă:

$$x_0 = a + \frac{b}{3} + c \qquad a = \frac{1}{2}(-x_0 + y_0 + 2z_0)$$

$$y_0 = a + \frac{b}{3} - c \quad \Leftrightarrow \quad b = 3(x_0 - z_0)$$

$$z_0 = a + c \qquad c = \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$$

2) Valorile proprii ale matricei B sînt -2 (simplă) și 0 (dublă); teorema lui Cayley-Hamilton permite de a scrie $B^2(B + 2) = 0$, $B^3 = -2B^2$, înmulțind ambii membri prin B^{n-3} se obține

$$B^n = -2B^{n-1}$$

deci

$$B^n = (-2)^{n-2}B^2 = (-2)^n \frac{B^2}{4}$$

prin urmare:

$$e^{Bt} = I + Bt + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \frac{B^2}{4} t^n$$

$$= \frac{B^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2t)^n}{n!} + I - \frac{B^2}{4} + \left(B + \frac{B^2}{2}\right)t$$

$$= \frac{B^2}{4} e^{-2t} + I - \frac{B^2}{4} + \left(B + \frac{B^2}{2}\right)t$$

$$e^{At} = e^{4tI + Bt} = e^{4It}e^{Bt}$$

$$= Ie^{4t}e^{Bt}$$

$$= \frac{B^2}{4} e^{2t} + \left(I - \frac{B^2}{4}\right) e^{4t} + \left(B + \frac{B^2}{2}\right) te^{4t}$$

este suficient deci pentru a cunoșate matricea e^{At} de a calcula B și B^2, avem

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluția x, y, z ale sistemului (S) luînd valorile x_0, y_0, z_0, pentru $t = 0$, sînt termenii matricei

$$X = e^{AT}X_0$$

Scanned with OKEN Scanner

X_0 este matricea coloană ai cărui termeni sînt x_0, y_0, z_0:

$$x = \frac{1}{2}(-x_0 + y_0 + 2z_0)e^{2t} + \frac{1}{2}(3x_0 - y_0 - 2z_0)e^{4t} + 3(x_0 - z_0)te^{4t}$$

$$y = \frac{1}{2}(-x_0 + y_0 + 2z_0)e^{2t} + \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 2z_0)e^{4t} - 3(x_0 - z_0)te^{4t}$$

$$z = \frac{1}{2}(-x_0 + y_0 + 2z_0)e^{2t} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{4t} + 3(x_0 - z_0)te^{4t}.$$

CAPITOLUL XVII

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL I LINIARE

1174. Curbele caracteristice sînt date de $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{0}$;

$$z = C_2;\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} + c;\ bx - ay = c_1.$$

Suprafeţele integrale sînt

$$C_2 = \varphi(c_1) \text{ sau } z = \varphi(bx - ay).$$

1175. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$; $\frac{y}{x} = c$, deci $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1176. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$; $z = c_2$; $x^2 + y^2 = c_1$,

deci integrala este

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

1177. Ecuaţiile diferenţiale ale curbelor caracteristice $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}$, de unde $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ şi $dx = zdz$. Cele două integrale sînt $\frac{y}{x} = C_1$ şi $z^2 = 2x + C_2$, iar suprafaţa integrală generală $C_2 = \varphi(C_1)$ sau $z^2 - 2x = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1178. Ecuaţiile diferenţiale ale curbelor caracteristice sînt $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{-y^2}$; $xy = C$, rezultă $y^2dy = Cdz$ sau $\frac{y^3}{3} + C_1 = xyz$; $xyz - \frac{y^3}{3} = \varphi(xy)$.

1179. Sistemul de ecuaţii al curbelor caracteristice este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

Din $xdx = ydy$ rezultă

$$x^2 - y^2 = C_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

O combinație integrabilă este

$$\frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x^2 + y^2)}$$

sau

$$\frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{xy} = \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

iar integrala este $\ln xy + \ln C_2 = \ln z$. Suprafața integrală este $z = xy\varphi\ (x^2 - y^2)$.

1180. Sistemul de ecuații al curbelor caracteristice este

$$\frac{\mathrm{d}x}{2y(2-x)} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2 + z^2 - y^2 - 4x} = \frac{\mathrm{d}z}{-2yz}.$$

care se pune sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{2y\mathrm{d}y}{y^2 - x^2 - z^2 + 4x} = \frac{2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

de unde

$$\ln(x-2) = \ln c_1 z\ ;\ \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln c_2 z$$

sau

$$x - 2 = c_1 z\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 z$$

iar suprafața integrală este

$$x^2 + y^2 + z^2 = z\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{z}\right).$$

1181. Se trece la coordonate polare $x = \rho\cos\theta\ ;\ y = \rho\sin\theta$.

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

din care rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Înlocuind în ecuația dată, se obține ecuația

$$\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\partial z}{\partial \theta} = z.$$

Sistemul de ecuații diferențiale al curbelor caracteristice este

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{-1} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Rezultă

$$z = \rho\mathrm{f}(\ln\rho + \theta)$$

sau

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{f}\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

1182. Sistemul de ecuații diferențiale al curbelor caracteristice este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{x^2 + 2u},$$

de unde rezultă

$$y = C_1 x\,;\ z = C_2 x,$$

iar din primul și ultimul raport

$$u' - \frac{2}{x}u = x,$$

a cărei integrală este

$$\frac{u - x^2 \ln x}{x^2} = C_3\,;\ C_3 = f(C_1,\ C_2)$$

sau

$$u = x^2 \ln x + x^2 f\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right).$$

1183. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Din acest sistem se deduce

$$\frac{x\,dx}{x^2} = \frac{y\,dy}{y^2} = \frac{z\,dz}{z^2 + az\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}\,;$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + az\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sau

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(az + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})} = \frac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

care se poate scrie

$$\frac{\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + az} = \frac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Făcînd suma numărătorilor către suma numitorilor, rezultă

$$\frac{\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + az + z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

Deci

$$\frac{\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + dz}{(a + 1)(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})} = \frac{dx}{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd, se obține

$$\ln(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = (a + 1)\ln x + \ln c_2$$

sau

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c_2 x^{a+1}.$$

Din primele două rapoarte rezultă

$$y = c_1 x.$$

Ecuația suprafețelor integrale este

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^{a+1} f\left(\frac{y}{x}\right).$$

1184. Sistemul de ecuații diferențiale ale curbelor caracteristice este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}.$$

Ecuațiile curbelor caracteristice sînt reprezentate de ecuațiile:

$$xy = C \text{ și } \frac{z}{x} = C_1. \tag{1}$$

Suprafețele integrale sînt $z = x\varphi(xy)$, obținute scriind că $C_1 = \varphi(C)$. Pentru a obține suprafața cerută, se scrie că sistemul următor $xy = C$; $\frac{z}{x} = C_1$; $x = y$; $z = x^2$ este compatibil. Eliminînd x, y, z, se obține $C = C_1$. Suprafața este $z = x^2 y$.

1185. Ecuațiile diferențiale ale curbelor caracteristice sînt

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dz}{-6x^2 y},$$

care dau

$$x^3 - y^2 = C_1, \quad z + y^2 = C_2.$$

Integrala generală se obține punînd

$$C_2 = \varphi(C_1)$$

sau

$$z + y^2 = \varphi(x^3 - y^2).$$

O curbă caracteristică trece prin punctul $x = 0$, $y = 2z$, z fiind arbitrar dacă $C_1 = 2z$ și $C_2 = 3z$. Această caracteristică întîlnește parabola dacă $C_2 = -\frac{3C_1}{2}$, care determină suprafața, locul caracteristicilor care întîlnesc parabola $z + y^2 = -\frac{3}{2}(x^3 - y^2)$ sau $z = \frac{1}{2}(y^2 - 3x^3)$.

1186. Ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{z(x + z)} = \frac{dy}{-y(y + z)} = \frac{dz}{0}$$

de unde

$$z = C_1, \quad \frac{dx}{x + z} = \left(\frac{1}{y + z} - \frac{1}{y}\right) dy;$$

Scanned with OKEN Scanner

cum z poate fi presupus constant, rezultă

$$\ln(x+z) = \ln(y+z) - \ln y + \ln C_2$$

sau

$$y(x+z) = C_2(y+z).$$

Integrala generală este

$$C_2 = \mathrm{f}(C_1)$$

sau

$$y(x+z) = (y+z)\mathrm{f}(z).$$

O curbă caracteristică întîlneşte parabola $x = 1$; $y = z^2$ dacă avem deodată $z = C_1$;

$$C_2 = y\frac{1+z}{y+z} = C_1^2\,\frac{1+C_1}{C_1^2+C_1} = C_1,$$

care dă $\mathrm{f}(z) = z$ şi integrala este $xy = z^2$.

1187. Ecuaţiile diferenţiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{z\sqrt{x^2+y^2}}\,dz = \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}.$$

De unde

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Din ultima ecuaţie rezultă

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2-a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{dz}{z},$$

în care se face

$$x^2+y^2 = u^2$$

şi se obţine

$$\frac{du}{u-a} = \frac{dz}{z},$$

deci

$$z = (\sqrt{x^2+y^2}-a)C_2.$$

Suprafeţele integrale sînt

$$z = (\sqrt{x^2+y^2}-a)\,\mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right),$$

care sînt generate de dreptele

$$y = C_1x;\quad z = (x\sqrt{1+C_1^2}-a)\mathrm{f}(C_1).$$

Curbele caracteristice întîlnesc $x = 2z$; $x^2+y^2 = 4a^2$ dacă avem

$$z = C_2(\sqrt{4a^2}-a) = aC_2$$

şi

$$4a^2 = x^2(1+C_1^2) = 4z^2(1+C_1^2);\quad C_2^2(1+C_1^2) = 1.$$

Locul curbelor caracteristice este suprafaţa

$$z = x\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad a^2x^2 = (z-x)^2(x^2+y^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

1188. Curbele caracteristice sînt determinate de ecuaţiile

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2},$$

din care rezultă

$$y = Cx$$

şi

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{z(x^2 + y^2 + z^2)}$$

sau

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1 x.$$

Suprafeţele

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\,f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sînt date de cercurile $y = Cx$;

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\,f(C),$$

care sînt tangente în 0 la Oz.

Suprafaţa trece prin curba

$$x = a;\ z^2 - y^2 = a^2$$

dacă ecuaţia

$$2a^2 + 2y^2 = a\,f\left(\frac{y}{a}\right)$$

este verificată pentru orice valoare a lui y. $f(t) = 2a(1 + t^2)$. Rezultă suprafaţa

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\left(x + \frac{y^2}{x}\right).$$

1189. Ecuaţiile diferenţiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{y^2 - x^2 + 2xz} = \frac{dy}{2y(z - x)} = \frac{dz}{0};$$

se deduce $z = c$.

$$\frac{2y\,dy}{2y^2} = \frac{2(x - c)\,dx}{x^2 - 2cx - y^2} = \frac{2(x - c)\,dx + 2y\,dy}{x^2 - 2cx + y^2},$$

deci

$$\ln y = \ln(x^2 + y^2 - 2cx) - \ln c_1.$$

Ecuaţiile caracteristicilor sînt

$$z = c;\ x^2 + y^2 - 2xz = c_1 y,$$

iar suprafeţele integrale

$$x^2 + y^2 - 2xz = 2y\,f(z)$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt generate de cercurile al căror plan rămîne paralel cu planul xOy și al căror centru în $x = y = c$, $y = f(z)$ descrie o curbă în planul $x = z$, acest cerc întîlnind axa Oz. Cercurile caracteristice întîlnesc elipsa

$$x = 0,\ y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

dacă

$$z = c\ ;\ y = c_1\ ;\ c_1^2 + 4c^2 = 4a^2.$$

Locul acestor cercuri este suprafața

$$(x^2 + y^2 - 2xz)^2 = 4y^2(a^2 - z^2)$$

sau

$$(x - z)^2 + (y \pm \sqrt{a^2 - z^2})^2 = a^2.$$

1190. Ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2zy^2}.$$

Primele două rapoarte dau o ecuație omogenă. Se pune $y = tx$ și se obține

$$\frac{dy}{2y^3} = \frac{ydx - xdy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{-t\,dt}{y^2(1 + t^2)} \qquad y = \frac{c}{1 + t^2} = \frac{cx^2}{x^2 + y^2}.$$

Ecuațiile caracteristice sînt

$$z = c_1 y\ ;\ (x^2 + y^2)y = cx^2,$$

iar integrala este

$$z = y\,f\left(y\,\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right).$$

Curbele caracteristice întîlnesc cercul

$$x^2 + y^2 = R^2\ ;\ z = a$$

dacă

$$y = \frac{a}{c_1}\ ;\ R^2 a c_1 = c(R^2 c_1^2 - a^2).$$

Locul acestor caracteristici este suprafața

$$aR^2x^2z = (x^2 + y^2)(R^2z^2 - a^2y^2).$$

1191. 1) Ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{2\mathrm{ch}x} = \frac{dy}{2y\mathrm{sh}x} = \frac{dz}{z\ \mathrm{sh}\ x}.$$

Se deduc ecuațiile curbelor caracteristice

$$z^2 = cy\ ;\ y = b\ \mathrm{ch}\ x. \qquad (1)$$

Suprafețele integrale sînt

$$z^2 = yf\left(\frac{y}{\mathrm{ch}x}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Curbele (1) întîlnesc dreapta $x = y = z$ dacă

$$c = x\,;\ b = \frac{x}{\operatorname{ch} x} = \frac{c}{\operatorname{ch} c}\,.$$

Aceste caracteristici $z^2 = cy\,;\ y = \dfrac{c}{\operatorname{ch} c}\operatorname{ch} x$ generează suprafața integrală

$$y^2 \operatorname{ch}\left(\frac{z^2}{y}\right) = z^2 \operatorname{ch} x.$$

3) Caracteristicile (1) întîlnesc parabola

$$x = 0\,;\ z^2 = 2p(y - a)$$

dacă

$$y = b\,;\ z^2 = cb = 2p(b - a)\,;\ b = \frac{2ap}{2p - c}\,;\ z^2 = cy\,;\ y = \frac{2ap}{2p - c}\operatorname{ch} x.$$

Aceste curbe generează suprafața integrală

$$2py - z^2 = 2ap \operatorname{ch} x.$$

1192. Ecuația se scrie

$$x(x^2 - y^2)p - y(x^2 - y^2)q = 2z(x^2 + y^2)$$

Sistemul curbelor caracteristice este

$$\frac{dx}{x(x^2 - y^2)} = \frac{dy}{-y(x^2 - y^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}\,,\quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

sau

$$xy = C_1.$$

Pentru altă combinație avem

$$\frac{x\,dx}{x^2(x^2 - y^2)} = \frac{-y\,dy}{y^2(x^2 - y^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}$$

sau

$$\frac{x\,dx - y\,dy}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}$$

de unde

$$\frac{2x\,dx - 2y\,dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{z}\qquad z = C_2(x^2 - y^2)$$

Soluția generală este deci

$$C_2 = \mathrm{f}(C_1)$$

sau

$$z = (x^2 - y^2)\mathrm{f}(xy).$$

Curbele

$$xy = C_1,\ z = C_2(x^2 - y^2)$$

trebuie să se sprijine pe curba

$$x = \operatorname{tg}\varphi,\ y = \frac{1}{\cos\varphi},\ z = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = C_1, \quad z = \frac{1}{C_1},$$

deci

$$\frac{1}{C_1} = C_2\left(\operatorname{tg}^2\varphi - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)$$

sau

$$\frac{1}{C_1} = -C_2,$$

sau încă

$$\frac{1}{C_1} + C_2 = 0.$$

Eliminînd C_1 și C_2 rezultă

$$z = -\frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

1193. Ecuațiile normalei în M sînt

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Coordonatele lui N sînt

$$X = x + pz\,; \quad Y = y + qz\,; \quad z = 0.$$

$$MN = \sqrt{z^2(1 + p^2 + q^2)},$$

iar sfera are ecuația

$$(X - x - pz)^2 + (Y - y - qz)^2 + Z^2 - z(1 + p^2 + q^2) = 0.$$

Înlocuind coordonatele curente cu ale originii, se obține puterea originii față de sferă

$$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 - z^2(1 + p^2 + q^2) = k^2$$

sau

$$2pxz + 2qyz = k^2 + z^2 - x^2 - y^2.$$

Ecuațiile diferențiale ale curbelor caracteristice sînt

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{k^2 + z^2 - x^2 - y^2}.$$

De unde

$$y = C_1x \text{ și } \frac{x\,dx}{2x^2z} = \frac{y\,dy}{2y^2z} = \frac{z\,dz}{k^2z + z^3 - x^2z - y^2z} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{k^2z + z^3 + x^2z + y^2z},$$

deci

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{z(x^2 + y^2 + z^2 + k^2)}\,; \quad \ln c_2x = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + k^2)$$

sau

$$x^2 + y^2 + z^2 + k^2 = c_2x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$c_2 = \varphi(c_1)$$

adică

$$x^2 + y^2 + z^2 + k^2 = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

1194. Coordonatele lui N sînt cele din problema precedentă, deci

$$MN = \sqrt{p^2z^2 + q^2z^2 + z^2}\,;\quad ON = \sqrt{(x + pz)^2 + (y + qz)^2}.$$

Rezultă ecuația

$$2pxz + 2qyz = z^2 - x^2 - y^2$$

a cărei soluție

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

obținută la exercițiul 1182.

1195. Planul tangent $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$ taie Oz în punctul P de coordonate $X = 0\,;\ Y = 0\,;\ Z = z - px - qy$. Dreapta MN are ecuațiile

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - z + px + qy}{pz + qy}.$$

Pentru punctul Q avem

$$Z = 0\,;\quad X = x - \frac{xz}{px + qy},$$

ceea ce dă ecuația cu derivate parțiale

$$px + qy = \frac{xz}{x - a}.$$

Ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sînt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz(x - a)}{xz},$$

de unde

$$y = cx\,;\ z = c_1(x - a),$$

iar suprafețele integrale $z = (x - a)\mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right)$ sînt generate de dreptele

$$y = cx\,;\ z = (x - a)\mathrm{f}(c).$$

O curbă caracteristică întîlnește cercul

$$z = a\,;\ x^2 + y^2 = ax$$

dacă

$$x(1 + c^2) = a\,;\ c_1 = \frac{a}{x - a} = \frac{1 + c^2}{c^2}$$

locul acestor caracteristici este suprafața

$$zy^2 = (a - x)(x^2 + y^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Nr. crt.	Pagina	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
1	14	Pb. 34	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
2	20	Pb. 185	$\int \frac{x\, e^{\arcsin x}}{1-x^2}\, dx$	$\int \frac{x\, e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
3	36	Pb. 398	$\int \left(\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}$	$\int \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) dx$
4	37	Pb. 414	$u_n = \sum_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t \sin t}{1+t^2}\, dt$	$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t \sin t\, dt}{1+t^2}$
5	44	Pb. 445	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{x^2}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3 \sqrt[3]{x^2}}$
6	51	Pb. 495	$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$	$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$
7	88	1 de jos	$\int_{\partial x} \omega = \int_x \alpha d\omega$	$\int_{\partial x} \omega = \int_x d\omega$
8	89	10 de sus	$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) dy \wedge dz \ldots$	$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz \ldots$
9	101	Pb. 981	$(3x^2 + 2x^3)dx + y^3 dy = 0$	$(3y^2x + 2x^3)dx + y^3 dy = 0$
10	121	Pb. 1192	$z = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$	$z = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$

Scanned with OKEN Scanner